C) Discriminant

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

If $d \equiv 1 \pmod 4$ then $\left\{1, \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right\}$ is an integral basis of A.

C) Discriminant

Let $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ be an integral basis. Then

$$D = D_K = \det\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(\alpha_1^2) & \mathrm{Tr}(\alpha_1\alpha_2) \\ \mathrm{Tr}(\alpha_1\alpha_2) & \mathrm{Tr}(\alpha_2^2) \end{pmatrix}$$

is independent of the choice of the integral basis. It is called the discriminant of K. It is a non-zero integer.

If $d \equiv 2$ or $3 \pmod 4$ then

$$D = \det\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(1) & \mathrm{Tr}(\sqrt{d}) \\ \mathrm{Tr}(\sqrt{d}) & \mathrm{Tr}(d) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \quad \text{so } D = 4d\,.$$

If $d \equiv 1 \pmod 4$ then

$$D = \det\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(1) & \mathrm{Tr}\left(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right) \\ \mathrm{Tr}\left(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right) & \mathrm{Tr}\left(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \dfrac{1+d}{2} \end{pmatrix} \text{ so } \quad D = d\,.$$

Every discriminant is $D \equiv 0$ or $1 \pmod 4$.

In terms of the discriminant,

$$A = \left\{ \frac{a + b\sqrt{D}}{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbf{Z}\,, \quad a^2 \equiv Db^2 \pmod 4 \right\}.$$

D) Decomposition of primes

Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, where d is a square-free integer, let A be the ring of integers of K.

The ideal $P \neq 0$ of A is a prime ideal if the residue ring A/P has no zero-divisors.

If P is a prime ideal there exists a unique prime number p such that $P \cap \mathbf{Z} = \mathbf{Z}p$, or equivalently, $P \supseteq Ap$.