§2. Formes quadratiques réduites

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LEMME 2. *Il n'y a qu'un nombre fini de triplets de nombres entiers* (a, b, c) *tels que* $b^2 - 4ac = -d$ *et* $|b| \leqslant a \leqslant c$.

Démontrons le lemme 1. Soit $ax^2 + bxy + cy^2$ une forme quadratique appartenant à la classe C considérée. Par hypothèse cette forme est positive, de sorte que $a > 0$ et $c > 0$. Les changements de variables $(x, y) \mapsto (x - \varepsilon y, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y - \varepsilon x)$, où ε est le signe de b, ont pour effet de remplacer (a, b, c) par $(a, b - 2\varepsilon a, a + c - |b|)$ et par $(a + c - |b|, b - 2\varepsilon c, c)$. Si donc $|b| > a$ ou $|b| > c$, on peut remplacer $ax^2 + bxy + cy^2$ par une forme équivalente pour laquelle la quantité $a + c$ est strictement plus petite. Après un nombre fini de substitutions de ce type, on trouve une forme $ax^2 + bxy + cy^2$ dans C pour laquelle $|b| \leqslant a$ et $|b| \leqslant c$. Cette forme, ou la forme $cx^2 - bxy + ay^2$ qui s'en déduit par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, -x)$, remplit les conditions du lemme 1.

Démontrons le lemme 2. Si (a, b, c) sont comme dans l'énoncé de ce lemme, on a

$$d = 4ac - b^2 \geqslant 4a^2 - a^2 = 3a^2 , \tag{3}$$

de sorte que a ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs; il en est alors de même de b et de c, puisque $|b| \leqslant a$ et $c = (b^2 + d)/4a$.

§ 2. FORMES QUADRATIQUES RÉDUITES [1])

Dans ce paragraphe, nous montrons comment la *théorie de la réduction* de Gauss permet de sélectionner un représentant dans chaque classe C de formes quadratiques de discriminant $-d$.

Nous savons déjà que C contient une forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ telle que $|b| \leqslant a \leqslant c$ (lemme 1 du § 1). Peut-il y avoir plusieurs formes de ce type dans C? En fait, la seule autre possible est $ax^2 - bxy + cy^2$, lorsqu'elle est dans C. Ceci vient du fait que $|b|$ est déterminé par a et c (on a $b^2 - 4ac = -d$), et que a, c sont caractérisés par le fait que pour toute forme quadratique $q \in C$, on a

$$a = \inf(q(\mathbf{u})) \qquad (\mathbf{u} \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Z}^2) ; \tag{4}$$

$$ac = \inf(q(\mathbf{u})q(\mathbf{v})) \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ non colinéaires dans } \mathbf{Z}^2) . \tag{5}$$

Il nous suffit en effet de vérifier (4) et (5) pour une seule forme quadratique $q \in C$, par exemple la forme $ax^2 + bxy + cy^2$ elle-même. Mais

[1]) C.-F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 171 et 172.

pour celle-ci, on a $q(1, 0) = a$, $q(0, 1) = c$ et $q(x, y) \geqslant ax^2 - |b||xy| + cy^2 \geqslant (2a-|b|)|xy| + (c-a)y^2$, d'où

$$(6)\qquad \begin{aligned} &q(x, 0) \geqslant a, && \text{si } x \neq 0\\ &q(0, y) \geqslant c, && \text{si } y \neq 0\\ &q(x, y) \geqslant (2a-|b|) + (c-a) = a + c - |b| \geqslant c && \text{si } xy \neq 0, \end{aligned}$$

et donc les égalités (4) et (5).

Voyons maintenant dans quels cas la forme $ax^2 - bxy + cy^2$ appartient à la classe C:

LEMME. *Pour que la forme* $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ *(avec* $|b| \leqslant a \leqslant c$*) soit équivalente à la forme* $q'(x, y) = ax^2 - bxy + cy^2$, *il faut et il suffit que l'on ait* $a = |b|$, $a = c$ *ou* $b = 0$.

On a $q(x, y) = q'(x \pm y, y)$ si $a = \pm b$, $q(x, y) = q'(y, -x)$ si $a = c$, $q(x, y) = q'(x, y)$ si $b = 0$. Supposons $0 < |b| < a < c$. S'il existe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ tel que $q'(x, y) = q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$, on a $q(\alpha, \gamma) = a$ et $q(\beta, \delta) = c$, d'où $\gamma = 0$ puis $\beta = 0$ en appliquant (6), et finalement $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \pm I$, ce qui est absurde.

L'étude qui précède nous conduit à adopter la définition suivante: une forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ est dite *réduite* si l'on a

$$\begin{aligned} &|b| \leqslant a \leqslant c\\ &b \geqslant 0 \quad \text{si} \quad a \text{ est égal à } |b| \text{ ou à } c. \end{aligned}$$

Nous avons alors prouvé le théorème suivant:

THÉORÈME. *Chaque classe de formes quadratiques de discriminant* $-d$ *contient une unique forme réduite.*

La démonstration du lemme 1 du § 1 fournit en fait un algorithme permettant d'obtenir la forme quadratique réduite équivalente à une forme donnée.

Exemple. Appliqué à la forme quadratique $9x^2 + 43xy + 53y^2$ (représentée par (9, 43, 53) pour abréger), cet algorithme s'écrit

$$(9, 43, 53) \sim (9, 25, 19) \sim (9, 7, 3) \sim (5, 1, 3) \sim (3, -1, 5)$$

et $3x^2 - xy + 5y^2$ est la forme réduite cherchée.