# §3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

## § 3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes [1])

Soit $d$ un entier $\geqslant 1$. D'après le § 2, le nombre $\tilde{h}(-d)$ de classes de formes quadratiques de discriminant $-d$ est le nombre de formes quadratiques réduites de discriminant $-d$, c'est-à-dire le nombre de triplets $(a, b, c)$ d'entiers vérifiant

$$(7)\qquad \begin{aligned} & b^2 - 4ac = -d \\ & |b| \leqslant a \leqslant c \\ & b \geqslant 0 \quad \text{si} \quad a \text{ est égal à } |b| \text{ ou à } c\,. \end{aligned}$$

Nous savons déjà que $\tilde{h}(-d)$ est non nul si et seulement si $-d$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Les conditions (7) entraînent que $a$, donc aussi $|b|$ est majoré par $\sqrt{d/3}$ (§ 1, formule (3)) et que $|b|$ est de même parité que $d$. On en déduit aussitôt la formule suivante, permettant de calculer $\tilde{h}(-d)$:

Proposition. *Supposons $-d$ congru à 0 ou à 1 modulo 4. On a:*

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{\substack{0 \leqslant b \leqslant \sqrt{d/3} \\ b \equiv d (\mathrm{mod.}\ 2)}} \ \sum_{\substack{a \mid ((b^2+d)/4) \\ b \leqslant a \leqslant \sqrt{(b^2+d)/4}}} n(a, b)$$

*avec $n(a, b) = 1$ si l'on a $b = 0$ ou $a = b$ ou $a = \sqrt{(b^2+d)/4}$, et $n(a, b) = 2$ sinon.*

*Exemple.* Calculons $\tilde{h}(-347)$. On a $10 < \sqrt{347/3} < 11$, d'où le tableau suivant:

| $b$ | $(b^2+d)/4$ | $a$ | $n(a, b)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $87 = 3.29$ | 1, 3 | 1, 2 |
| 3 | 89 | — | — |
| 5 | $93 = 3.31$ | — | — |
| 7 | $99 = 3^2.11$ | 9 | 2 |
| 9 | 107 | — | — |

dont on déduit $\tilde{h}(-347) = 5$. Les coefficients des cinq formes réduites se lisent sur le tableau; ce sont:

$$(1, 1, 87),\ (3, 1, 29),\ (3, -1, 29),\ (9, 7, 11) \text{ et } (9, -7, 11)\,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 174 et 175.

L'étude des formes quadratiques se ramène facilement à celle des formes *primitives*, c'est-à-dire celles dont les coefficients ont 1 pour plus grand commun diviseur. En effet, si $-d < 0$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4, il existe un plus grand entier $F$ tel que $-d$ s'écrive $-d_0F^2$ avec $-d_0$ congru à 0 ou 1 modulo 4. Pour toute classe $C$ de formes quadratiques de discriminant $-d$, il existe un diviseur $f \geqslant 1$ de $F$ et une classe $C'$ de formes quadratiques primitives de discriminant $-df^{-2}$ tels que $C = fC'$.

Les nombres de classes $\tilde{h}$ et les nombres de classes primitives $h$ sont donc reliés par l'égalité

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{f|F} h(-df^{-2}) . \tag{8}$$

Lorsque $F$ est égal à 1, ce qui équivaut à dire que $d$ n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier impair et est congru à 3 (mod. 4), à 4 (mod. 16) ou à 8 (mod. 16), on dit que $-d$ est un *discriminant fondamental*. Toute forme de discriminant $-d$ est alors primitive et on a $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

## § 4. Le groupe des classes [1])

Cherchant à généraliser la formule classique

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'-yy')^2 + (xy'+yx')^2 ,$$

Gauss se demande pour quels couples $(q, q')$ de formes quadratiques, il existe une forme quadratique $q''$ telle que l'on ait une identité

$$q(x, y)q'(x', y') = q''(x'', y'') ,$$

où $x''$ et $y''$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $xx'$, $xy'$, $yx'$ et $yy'$.

Si l'on a une identité du type précédent, et si $-d$, $-d'$, $-d''$ désignent les discriminants de $q, q', q''$, le carré du déterminant de l'application linéaire $(x, y) \mapsto (x'', y'')$ (resp. $(x', y') \mapsto (x'', y'')$) est égal à $dq'(x', y')^2/d''$ (resp. $d'q(x, y)^2/d''$).

Gauss montre que lorsque $q$ et $q'$ sont des formes primitives de même discriminant $-d$, il est possible d'obtenir une identité du type ci-dessus, avec $q''$ forme primitive de discriminant $-d$, et

$$q'(x', y') = \det\big((x, y) \mapsto (x'', y'')\big) , \quad q(x, y) = \det\big((x', y') \mapsto (x'', y'')\big) .$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 234 à 243.