§5. Lien entre h(-d) et $h(-df^2)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$2C$, $3C$, $4C$, $5C$ sont les classes des formes réduites dont les coefficients sont (9, 7, 11), (9, −7, 11), (3, −1, 29) et (1, 1, 87) respectivement.

§ 5. Lien entre $h(-d)$ et $h(-df^2)$ [1])

Soient $-d$ un *discriminant fondamental* (cf. § 3), et f un entier $\geqslant 1$. Les nombres de classes primitives $h(-df^2)$ et $h(-d)$ sont liés par une formule simple. Pour l'établir, nous allons définir un homomorphisme de groupes

$$v\colon Cl(-df^2) \to Cl(-d)\,.$$

C'est dans le langage des idéaux fractionnaires que cet homomorphisme se définit le plus aisément: à la classe d'un $\mathcal{O}(-df^2)$-idéal fractionnaire L, v fait correspondre la classe de $\mathcal{O}(-d)L$, qui est un $\mathcal{O}(-d)$-idéal fractionnaire.

Pour tout $x \in \mathcal{O}(-d)$, inversible modulo $f\mathcal{O}(-d)$, le réseau $x\mathcal{O}(-d) \cap \mathcal{O}(-df^2)$ est un $\mathcal{O}(-df^2)$-idéal fractionnaire. L'application qui à x associe la classe de cet idéal définit par passage au quotient un homomorphisme de groupes

$$u\colon \big(\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d)\big)^\times \to Cl(-df^2)\,.$$

On démontre (en utilisant le fait que « la donnée d'un réseau équivaut à celle de ses localisés ») que la suite

$$\big(\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d)\big)^\times \xrightarrow{u} Cl(-df^2) \xrightarrow{v} Cl(-d) \to 0$$

est exacte, et que le noyau de u est engendré par les classes des entiers relatifs inversibles modulo f et des unités de $\mathcal{O}(-d)$.

Un argument de comptage permet d'en déduire la formule

$$h(-df^2) = h(-d)w^{-1}f \prod_{\substack{p|f \\ p \text{ premier}}} \big(1-p^{-1}\chi(p)\big)$$

où l'on a posé

$$w = \begin{array}{lll} 3 & \text{si} & d = 3 \quad \text{et} \quad f \geqslant 2 \\ 2 & \text{si} & d = 4 \quad \text{et} \quad f \geqslant 2 \\ 1 & \text{sinon}\,, & \end{array}$$

et où χ désigne le caractère de Dirichlet quadratique $n \mapsto \left(\dfrac{-d}{n}\right)$ associé

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 253 à 256.

au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. On a en particulier si $d > 4$

$$h(-df^2) \geqslant h(-d)\varphi(f) \tag{10}$$

où φ est la fonction d'Euler.

II. Le problème du nombre de classes

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement du nombre de classes lorsque le discriminant tend vers $-\infty$. Compte tenu des formules (8) de I. § 3 et (10) de I. § 5, il est légitime de restreindre notre étude aux discriminants fondamentaux (cf. I. § 3). Dans toute la suite, $-d$ sera un tel discriminant: on aura donc $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

Dans les derniers numéros de son exposé de la classification des formes quadratiques, Gauss émet quelques observations concernant les tables de nombres de classes (il avait constitué lui-même de telles tables, en particulier pour $d \leqslant 3000$); il qualifie de surprenante l'observation suivante [1]): pour chaque entier $h \geqslant 1$, il semble n'y avoir qu'un nombre *fini* de d tels que $h(-d) = h$. Ainsi, pour $h = 1$, ne trouve-t-il dans sa table que les neuf discriminants fondamentaux

$$-3,\ -4,\ -7,\ -8,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163$$

(et en outre les quatre discriminants non fondamentaux -12, -16, -27, -28).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, Heilbronn [2]) en 1934 a démontré que, conformément à l'observation de Gauss, on a bien

$$\lim_{d \to \infty} h(-d) = +\infty\,. \tag{11}$$

Des tables étendues de nombres de classes ont été construites par ordinateur. Buell [3]) par exemple a publié les valeurs de $h(-d)$ pour $d \leqslant 4\,000\,000$. Parmi les discriminants fondamentaux satisfaisant à cette inégalité, le nombre de ceux pour lesquels $h(-d)$ est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 est respectivement 9, 18, 16, 54, 25, 51, 31, 131, 34, 87, et

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 303.

[2]) H. Heilbronn, *On the class numbers in imaginary quadratic fields*, Quarterly J. of Math. (Oxford), 5 (1934), 150-160.

[3]) D. A. Buell, *Small class numbers and extreme values of L-functions of quadratic fields*, Math. of Comp. 31 (1977), 786-796.