§2. Fonctions zêta

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

-163. D'après le début de ce paragraphe, on a $r_n(-163) = 0$ pour $2 \leqslant n \leqslant 40$. Par suite, -163 n'est un carré modulo aucun des nombres premiers $\leqslant 39$, et le corollaire au théorème ci-dessus implique que si $r_n(-163) \neq 0$ et $n < 41^2$, nécessairement n est premier. Ceci explique pourquoi la suite (découverte par Euler): 41, 43, 47, 53, 61, ..., formée par les valeurs de $x^2 + x + 41$ pour $x \geqslant 0$ ne comporte que des nombres premiers jusqu'à 1601 $(=39^2+39+41)$.

§ 2. Fonctions zêta

Il est fructueux de réinterpréter les résultats du paragraphe précédent en introduisant des *séries de Dirichlet génératrices*: pour toute forme quadratique q de discriminant $-d$, la série de Dirichlet

$$\zeta(q, s) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} q(u, v)^{-s} \tag{16}$$

converge absolument pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ et l'on a

$$\zeta(q, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(q) n^{-s} \tag{17}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ est la fonction zêta de Riemann. Comme $\zeta(q, s)$ ne dépend que de la classe C de q, on l'écrit aussi $\zeta(C, s)$.

La fonction $\zeta(q, s)$ jouit de remarquables propriétés analytiques: la fonction

$$\Lambda(q, s) = 2d^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(q, s) \tag{18}$$

admet un *prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$, avec pour seuls pôles des *pôles simples en* 0 *et* 1 de résidus -1 et 1, et vérifie *l'équation fonctionnelle* $\Lambda(q, 1-s) = \Lambda(q, s)$. En effet, la fonction thêta

$$\theta(q, t) = \sum_{(n,m) \in \mathbf{Z}^2} \exp\left(-q(n, m)2\pi t/\sqrt{d}\right) \tag{19}$$

satisfait d'après la formule sommatoire de Poisson à l'équation fonctionnelle

$$\theta(q, t^{-1}) = t\theta(q, t)\,; \tag{20}$$

on a, par échange de la somme et de l'intégrale,

$$\Lambda(q, s) = \int_0^{\infty} [\theta(q, t) - 1]\, t^{s-1} dt\,, \tag{21}$$

et l'on en déduit l'expression suivante de $\Lambda(q, s)$, sur laquelle le prolongement méromorphe, les pôles et leurs résidus, et l'équation fonctionnelle sont évidents

$$\Lambda(q, s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty [\theta(q, t) - 1]\,(t^{s-1} + t^{-s})dt\,. \tag{22}$$

Soit K le corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}i\sqrt{d}$. On peut déduire du dictionnaire entre formes quadratiques de discriminant $-d$ et $\mathcal{O}(-d)$-idéaux fractionnaires (I., § 4) que l'on a

$$\zeta_K(s) = \sum_{C \in Cl(-d)} \zeta(C, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} r_n(-d)n^{-s} \tag{23}$$

où ζ_K est la fonction zêta du corps K (définie par $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s}$, où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux non nuls de l'anneau $\mathcal{O}(-d)$. Cette fonction ζ_K jouit de propriétés analytiques analogues à celles des fonctions $\zeta(C, s)$: en particulier, d'après ce qui précède, elle a un pôle simple en 1 de résidu

$$\mathrm{Res}_{s=1}\, \zeta_K(s) = \pi d^{-1/2} h(-d)\,. \tag{24}$$

Cette formule joue un rôle fondamental pour l'étude de $h(-d)$ par voie analytique.

Notons χ le caractère de Dirichlet $n \mapsto \left(\frac{-d}{n}\right)$. Le théorème de Gauss du § 2, ou plutôt son corollaire, traduit alors l'égalité entre séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(-d)n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(\frac{1+p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}}\right) \tag{25}$$

ou encore, compte tenu de (24), l'égalité

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi, s) \tag{26}$$

où $L(\chi, s)$ est la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$. Cette égalité équivaut à la décomposition de ζ_K en produit eulérien, décomposition que l'on prouve de nos jours directement en utilisant la factorisation des idéaux dans l'anneau de Dedekind $\mathcal{O}(-d)$.

En utilisant (25) et (26), nous allons reformuler le principe énoncé à la fin du paragraphe précédent.

PRINCIPE. *Supposons d grand et $h(-d)$ petit. Alors, on a $\chi(p) = -1$ pour la plupart des petits nombres premiers p. Si $\lambda: \mathbf{N} - \{0\} \to \{-1, 1\}$ est la fonction qui à un produit de r nombres premiers (non nécessairement*

distincts) associe $(-1)^r$, *on a* $\lambda(n) = \chi(n)$ *pour la plupart des petits nombres entiers* n. *La fonction* $\zeta_K(s)$ *doit ressembler à la fonction* $\zeta(2s)$.

Ces énoncés sont volontairement vagues. Les rendre précis est souvent le nœud des démonstrations de minorations de $h(-d)$ lorsque d tend vers ∞.

§ 3. Ce que l'on espère sur le comportement de $h(-d)$

On peut montrer que *en moyenne* (en un sens qui demande à être précisé, ce que je ne ferai pas ici), $h(-d)$ est équivalent à une constante non nulle fois $\sqrt{d}$; déjà Gauss connaissait ce type de résultat [1]).

Il n'est pas vrai par contre que $h(-d)/\sqrt{d}$ admette un minorant > 0 ou un majorant lorsque d tend vers $+\infty$: on sait par exemple que $h(-d)/(\sqrt{d}\log\log d)$ ne tend pas vers 0 et que $h(-d)\log\log d/\sqrt{d}$ ne tend pas vers $+\infty$ lorsque d tend vers $+\infty$.

On obtient cependant de façon élémentaire des *majorations* raisonnables de $h(-d)$ (raisonnable signifiant avec l'exposant $\frac{1}{2}$ que l'on attend pour d), de la forme $h(-d) \leqslant C\sqrt{d}\log d$. Par exemple:

Proposition. *On a pour* $d > 4$

$$h(-d) \leqslant \pi^{-1}\sqrt{d}\log d\,. \tag{27}$$

Compte tenu de (24) et (26), il revient au même de montrer que l'on a, en posant $\chi(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n \leqslant \log d\,.$$

Or, pour tout nombre réel $x > 0$, la somme $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\chi(n)$ est majorée par $N(x) = \inf([x], [(d-1)/2])$, et l'on a donc, en intégrant par parties

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n} = \int_{1^-}^{\infty}\frac{dM(x)}{x} = \int_1^{\infty}\frac{M(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{\infty}\frac{N(x)}{x^2}\,dx$$
$$= \int_{1^-}^{\infty}\frac{dN(x)}{x} = \sum_{n\leqslant[(d-1)/2]} 1/n \leqslant \log d\,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 302.