EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

Autor(en): **Grivel, Pierre-Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-56590

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 83-105

EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit M et N deux modules à gauche sur un anneau R. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}^n_R(N\,;M)$ classe, à équivalence près, les n-extensions de M par N.

D'autre part soit G un groupe et A un groupe abélien sur lequel G agit à gauche. On définit le n-ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans A comme étant le groupe $H^n(G\,;A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ où $\mathbf{Z}$ est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G\,;A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G\,;A)$ et $H^2(G\,;A)$ à partir de l'interprétation de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ et $\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$, sans avoir recours au complexe standard.

1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit R un anneau. Soit M et N deux R-modules à gauche. Une n-extension de M par N est une suite exacte de R-modules

$$\xi : 0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \to 0\,.$$

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont élémentairement équivalentes s'il existe n morphismes de R-modules $\gamma_i : E_i \to E'_i$ tels que $\gamma_1\alpha = \alpha'$, $\alpha'_i\gamma_i = \gamma_{i+1}\alpha_i$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$, et $\alpha'_n\gamma_n = \alpha_n$, ou n morphismes de R-modules $\gamma'_i : E'_i \to E_i$ tels que $\gamma'_1\alpha' = \alpha$, $\alpha_i\gamma'_i = \gamma'_{i+1}\alpha'_i$ pour $i = 1, 2, ..., n-1$, et $\alpha_n\gamma'_n = \alpha'_n$.

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont alors équivalentes s'il existe une suite d'équivalences élémentaires reliant ξ à ξ'.

On remarquera que dans le cas $n = 1$ l'équivalence élémentaire est déjà une relation d'équivalence car le morphisme γ est alors un isomorphisme.

On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.2. Soit ξ une n-extension de M par N. Soit $u: M \to M'$ et $v: N' \to N$ deux morphismes de R-modules.

Par produit cofibré on définit l'extension $u\xi$ de M' par N et par produit fibré on définit l'extension ξv de M par N'.

1.3. Soit ξ et ξ' deux n-extensions de M par N. Notons $\nabla: M \oplus M \to M$ l'application codiagonale définie par $\nabla(m_1; m_2) = m_1 + m_2$ et $\Delta: M \to M \oplus M$ l'application diagonale définie par $\Delta(m) = (m; m)$. La somme de Baer de $[\xi]$ et $[\xi']$ est définie en posant $[\xi] + [\xi'] = [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta]$.

Muni de cette opération l'ensemble des classes d'équivalence des n-extensions de M par N est un groupe abélien.

1.4. Il est bien connu que les classes d'équivalence des n-extensions de M par N sont classées par le n-ième foncteur dérivé $\mathrm{Ext}^n_R(N; M)$ du foncteur $\mathrm{Hom}_R(N; M)$.

1.5. Considérons maintenant un groupe G et un groupe abélien A.

Une extension de A par G est une suite exacte de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Si ξ et ξ' sont deux extensions de A par G alors ξ est équivalente à ξ' s'il existe un morphisme de groupe $\gamma: E \to E'$ tel que $\gamma\lambda = \lambda'$ et $\mu'\gamma = \mu$. On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.6. Si ξ est une extension de A par G on définit un morphisme de groupes $\theta: G \to \mathrm{Aut}\,(A)$ en posant, pour tout $g \in G$ et $a \in A$,

$$\lambda\theta(g)\,(a) = s(g)\lambda(a)s(g)^{-1}$$

où $s: G \to E$ est une section ensembliste de μ. Ainsi le groupe abélien A est muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche.

1.7. Si le groupe A est déjà muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche on désignera par $e(G; A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de A par G telles que l'action de G sur A induite par l'extension soit égale à l'action donnée de G sur A.

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π; on dit que σ_1 est A-conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A-conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de A-conjugaison des sections de π.

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

2. Dérivations et extensions

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g \in G} n_g\, g) = \sum_{g \in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G \backslash \{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g) \cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}\,(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g \cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A.

L'ensemble des dérivations intérieures de G dans A forme un sous-groupe de $\mathrm{Der}\,(G\,;A)$ noté $\mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

2.3. On suppose dorénavant que le groupe G agit à gauche sur le groupe abélien A.

On considère alors A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement à droite sur A. Une dérivation de G dans A est donc une application $f: G \to A$ qui satisfait la condition $f(gh) = g \cdot f(h) + f(g)$. On en déduit que $f(1) = 0$.

De plus, pour tout $a \in A$, la dérivation intérieure $f_a: G \to A$ est définie par $f_a(g) = g \cdot a - a$.

2.4. Lemme. *Le groupe* $\mathrm{Der}\,(G\,;A)$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G\,;A)$ *formé des morphismes de groupes abéliens* $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ *qui satisfont la condition* $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbf{Z}G$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ et $x = \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbf{Z}G$ on définit $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ en posant $\bar{f}(x) = \sum_{g \in G} n_g f(g)$. Inversément si $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G\,;A)$ satisfait la condition de l'énoncé et si $j: G \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion évidente, on définit une dérivation f en posant $f = \bar{f} \circ j$.

2.5. Proposition. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\omega: \mathrm{Der}\,(G\,;A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)\,.$$

Si $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ *on a* $\omega(f)\,(g-1) = f(g)$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$; posons $\omega(f) = \bar{f} \circ i$ où $i: IG \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion. Si $x \in \mathbf{Z}G$ et $y \in IG$ on a, d'après le lemme 2.4,

$$\omega(f)\,(xy) = \bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y) = x \cdot \omega(f)\,(y)\,;$$

donc $\omega(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\omega(f)\,(g-1) = \bar{f}(g-1) = f(g) - f(1) = f(g)$.

Définissons maintenant une application

$$\omega': \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A) \to \mathrm{Der}\,(G\,;A)\,.$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)$ et $g \in G$ posons $\omega'(u)\,(g) = u(g-1)$. Pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned}\omega'(u)\,(gh) &= u\big(g(h-1)+(g-1)\big) = g \cdot u(h-1) + u(g-1)\\ &= g \cdot \omega'(u)\,(h) + \omega'(u)\,(g)\,.\end{aligned}$$

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F : h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}\,.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma : G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma : G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = (f_\sigma(g)\,;g)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $(f_{\sigma'}(g)\,;g) = (a + f_\sigma(g) - g \cdot a\,;g)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)\,.$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.

3.2. THÉORÈME. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(G\,;A) = h(G\,;A)\,.$$

3.3. Pour construire l'application Φ on commence par considérer l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\theta : 0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Soit $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$ représentée par une dérivation $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$; d'après la proposition 2.5 on peut associer à f un morphisme $\tilde{f} = \omega(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)$.

En faisant le produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ on obtient l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Le $\mathbf{Z}G$-module F est le quotient de $\mathbf{Z}G \times A$ par le sous-module engendré par l'ensemble $\{(i(x)\,; -\tilde{f}(x)) \mid x \in IG\}$. Si $\pi : \mathbf{Z}G \times A \to F$ est la projection canonique, les morphismes α et β sont définis en posant $\alpha(a) = \pi(0\,;a)$ et $\beta\pi(x\,;a) = \varepsilon(x)$.

Si $f' \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ est un autre représentant de $[f]$ on lui associe de la même façon l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}'\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

3.4. LEMME. *Les extensions* $\tilde{f}\theta$ *et* $\tilde{f}'\theta$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : F \to F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & F' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Par hypothèse il existe $b \in A$ tel que $f' - f = f_b$ où $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\Delta : \mathbf{Z}G \times A \to \mathbf{Z}G \times A$$

en posant $\Delta(x\,;a) = (x\,;a - x \cdot b)$.

Si $x \in IG$ on peut écrire $x = \sum_{g \in G} n_g(g-1)$ si bien qu'en utilisant la proposition 2.5 on a

$$x \cdot b = \sum_{g \in G} n_g(g \cdot b - b) = \sum_{g \in G} n_g f_b(g) = \sum_{g \in G} n_g \tilde{f}_b(g-1)$$
$$= \tilde{f}_b\big(\sum_{g \in G} n_g(g-1)\big) = \tilde{f}_b(x).$$

On a donc $\Delta(x\,;-\tilde{f}(x)) = (x\,;-\tilde{f}(x)-\tilde{f}_b(x)) = (x\,;-\tilde{f}'(x))$ et on définit δ par la condition $\pi'\Delta = \delta\pi$.

On vérifie immédiatement que $\delta\alpha = \alpha'$ et $\beta'\delta = \beta$.

3.5. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([f]) = [\tilde{f}\theta]$.

3.6. On construit maintenant une application

$$\Psi : \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}.$$

Soit $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0.$$

Choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$ et considérons la dérivation $f_e \in \mathrm{Int}\,(G\,;E)$.

Comme on a $\mu f_e = 0$ on peut définir une application $f^e : G \to A$ par la condition $\lambda f^e = f_e$.

3.7. Lemme. *$f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ et $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.*

Démonstration. Pour tous $g, h \in G$ on a

$$\lambda f^e(gh) = (gh)\cdot e - e = g\cdot(h\cdot e - e) + g\cdot e - e$$
$$= g\cdot\lambda f^e(h) + \lambda f^e(g)$$
$$= \lambda\big(g\cdot f^e(h) + f^e(g)\big).$$

Comme λ est injectif il en résulte que $f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$. Soit $e' \in E$ tel que $\mu(e') = 1$; puisque $\mu(e-e') = 0$ il existe $b \in A$ tel que $\lambda(b) = e - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\lambda(f^e - f^{e'})(g) = (g\cdot e - e) - (g\cdot e' - e')$$
$$= g\cdot\lambda(b) - \lambda(b)$$
$$= \lambda(g\cdot b - b) = \lambda f_b(g).$$

Ainsi $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$ et par suite $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.

3.8. Supposons maintenant que l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} \mathbf{Z} \to 0$$

est un autre représentant de $[\xi]$.

En choisissant un élément $e' \in E'$ tel que $\mu'(e') = 1$ on définit une dérivation $f^{e'} \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

3.9. LEMME. $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

Démonstration. Les extensions ξ et ξ' étant équivalentes, il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\lambda'}{\to} & E' & \underset{\mu'}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme $\mu'(\gamma(e)-e') = 0$, il existe $b \in A$ tel que $\lambda'(b) = \gamma(e) - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \gamma\lambda(f^e - f^{e'})\,(g) &= \gamma\lambda f^e(g) - \lambda' f^{e'}(g) \\ &= \gamma(g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot (\gamma(e) - e') - (\gamma(e) - e') \\ &= \lambda'(g \cdot b - b) \\ &= \gamma\lambda f_b(g)\,. \end{aligned}$$

Comme γ est un isomorphisme et λ est injectif il en résulte que $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

3.10. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\xi]) = [f^e]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

3.11. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{\frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}}$.

Démonstration. Si $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$ est représentée par $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ alors $\Psi\Phi([f]) = \Psi([\tilde{f}\theta])$ où $\tilde{f}\theta$ est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0$$

décrite au n° 3.3.

Par définition du produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : \mathbf{Z}G \to F$, défini par $\gamma(x) = \pi(x\,;0)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & IG & \xrightarrow{i} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & \tilde{f}\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

L'élément $e = \pi(1\,;0) \in F$ vérifie la condition $\beta(e) = 1$; donc $\Psi([\tilde{f}\theta])$ est représentée par la dérivation $f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\alpha f^e(g) = g \cdot e - e = \pi(g-1\,;0)$.

Or on a $f^e = f$; en effet, compte tenu de la proposition 2.5 on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^e - f)\,(g) &= \alpha f^e(g) - \alpha\tilde{f}(g-1) \\ &= \alpha f^e(g) - \gamma(g-1) \\ &= \pi(g-1\,;0) - \pi(g-1\,;0) = 0\,. \end{aligned}$$

3.12. Lemme. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)}$.

Démonstration. Soit $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0$$

et choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$; on a alors $\Phi\Psi([\xi]) = [\tilde{f}^e\theta]$.

Il s'agit donc de démontrer que les extensions ξ et $\tilde{f}^e\theta$ sont équivalentes; pour cela il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : E \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si $u \in E$ on a $\mu(u - \mu(u)e) = 0$; on peut donc définir un morphisme de groupes abéliens $\upsilon : E \to A$ tel que $\lambda\upsilon(u) = u - \mu(u)e$ pour tout $u \in E$.

Définissons alors δ en posant $\delta(u) = \pi(\mu(u)\,;\upsilon(u))$. Il faut vérifier que δ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules; or si $g \in G$ et $u \in E$ on a

$$g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = \pi(\mu(u)\,(g-1)\,;g \cdot \upsilon(u) - \upsilon(g \cdot u))\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}\lambda(g\cdot\upsilon(u)-\upsilon(g\cdot u)) &= g\cdot(u-\mu(u)e)-(g\cdot u-\mu(u)e)\\ &= -\,\mu(u)\,(g\cdot e-e)\\ &= -\,\mu(u)\lambda f^{e}(g)\\ &= \lambda(-\mu(u)\tilde{f}^{e}(g-1))\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que $g\cdot\delta(u)-\delta(g\cdot u)=0$.

Finalement on vérifie immédiatement que $\delta\lambda=\alpha$ et $\beta\delta=\mu$.

3.13. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\xi_i]\in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ $(i=1,2)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi_i : 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $e_i\in E_i$ tel que $\mu_i(e_i)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_i}\in \mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_i f^{e_i}(g)=g\cdot e_i-e_i$.

On a alors $\Psi([\xi_1])+\Psi([\xi_2])=[f^{e_1}]+[f^{e_2}]=[f^{e_1}+f^{e_2}]$.

Maintenant $[\xi_1]+[\xi_2]$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\xi_0=\nabla(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta$ et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\lambda_1\oplus\lambda_2"] & E_1\oplus E_2 \arrow[r, "\mu_1\oplus\mu_2"] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[u, "\nabla"] & E \arrow[r, "\mu"'] \arrow[u, "\gamma"] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "1_{\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda_0"'] \arrow[u, "1_A"] & E_0 \arrow[r, "\mu_0"'] \arrow[u, "\delta"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{3.13.1}$$

On choisit un élément $e_0\in E_0$ tel que $\mu_0(e_0)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_0}\in \mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_0 f^{e_0}(g)=g\cdot e_0-e_0$.

On a alors $\Psi([\xi_1]+[\xi_2])=[f^{e_0}]$.

3.14. Lemme. $f^{e_1}+f^{e_2}-f^{e_0}\in \mathrm{Int}\,(G;A)$.

Démonstration. Comme $\mu(\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0))=0$, il existe un élément $a\in A$ tel que $\lambda(a)=\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0)$. Considérons la dérivation $f_a\in \mathrm{Int}\,(G;A)$. Pour tout $g\in G$ on a, compte tenu du diagramme (3.13.1),

$$\lambda(f^{e_1}(g)+f^{e_2}(g)-f^{e_0}(g)-f_a(g))=0\,.$$

4. Le groupe $H^2(G;A)$

4.1. On reprend les hypothèses de 3.1. On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : e(G;A) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A).$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G;A)$ on obtient alors le résultat classique suivant.

4.2. Théorème. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^2(G;A) = e(G;A).$$

4.3. On va construire l'application Φ.

Soit $[\xi] \in e(G;A)$ représentée par l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1.$$

Notons F le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $E\backslash\{1\}$; autrement dit $x \in F$ si et seulement si $x = \sum_{e \in E\backslash\{1\}} p_e e$, où $p_e \in \mathbf{Z}G$ et $p_e = 0$ pour presque tous les indices e. On fait la convention que $p_1\, 1 = 0$ dans F.

Soit L le sous-$\mathbf{Z}G$-module de F engendré par les éléments de F de la forme $e_1e_2 - \mu(e_1)\cdot e_2 - e_1$ où $e_1, e_2 \in E$. On notera en particulier que les éléments de la forme $-\mu(e)e^{-1} - e$ et $-\mu(e^{-1})\cdot e - e^{-1}$, où $e \in E$, sont dans L.

On pose $M = F/L$ et on note $\pi : F \to M$ la projection canonique.

4.4. On considère maintenant la suite de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Le morphisme ε est l'augmentation; on va définir les deux autres morphismes.

Pour tout $a \in A$ on pose $\alpha(a) = \pi(\lambda(a))$, mais il faut vérifier que α est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. Soit $s : G \to E$ une section ensembliste de μ.

Pour tout $g \in G$ et $a \in A$ on a

$$\begin{aligned}\alpha(g\cdot a) - g\cdot\alpha(a) &= \pi\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - g\cdot\lambda(a)\big)\\ &= \pi\big(\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - \mu(s(g)\lambda(a))s(g)^{-1}\\ &\quad - s(g)\lambda(a)\big) + \big(s(g)\lambda(a) - \mu(s(g))\lambda(a) - s(g)\big) - \big(-\mu(s(g))s(g)^{-1} - s(g)\big)\big) = 0.\end{aligned}$$

Enfin on définit un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar\beta : F \to \mathbf{Z}G$ en posant $\bar\beta(e) = \mu(e) - 1$ pour tout $e \in E$ puis en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette

application. On vérifie immédiatement que $\bar{\beta}(L) = 0$. On définit alors β par la condition $\beta\pi = \bar{\beta}$.

4.5. LEMME. *La suite* η *est exacte.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que $\beta\alpha = 0$ et $\varepsilon\beta = 0$. On peut donc considérer η comme un complexe de $\mathbf{Z}G$-modules et pour démontrer son exactitude il suffit de construire une homotopie contractante

$$0 \to A \underset{\sigma_2}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} M \underset{\sigma_1}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}G \underset{\sigma_0}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z} \to 0 .$$

On définit σ_0 en posant $\sigma_0(1) = 1$.

Soit $s: G \to E$ une section ensembliste de μ telle que $s(1) = 1$; on définit σ_1 en posant $\sigma_1\left[\sum_{g\in G} n_g g\right] = \sum_{g\in G} n_g \pi(s(g))$. Maintenant pour tout $g \in G$ et $e \in E$ on a $\mu(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) = 1$; on peut donc définir une application $h: G \times E \to A$ en posant

$$\lambda h(g\,;e) = s(g)es(g\mu(e))^{-1} .$$

On vérifie immédiatement à partir de cette définition que l'on a

$$h(g\,;e_1e_2) = h(g\mu(e_1)\,;e_2) + h(g\,;e_1) . \tag{4.5.1}$$

Comme tout élément $x \in F$ peut s'écrire $x = \sum_{(g\,;\,e)\in G\times(E\setminus\{1\})} n_{g,e}ge$ où $n_{g,e} \in \mathbf{Z}$ et $n_{g,e} = 0$ pour presque tous les indices $(g\,;e)$, on définit une application $\sigma: F \to A$ en posant $\sigma(x) = \sum_{(g\,;\,e)} n_{g,e}h(g\,;e)$.

De la relation (4.5.1) on déduit que $\sigma(L) = 0$; on peut donc définir σ_2 par la condition $\sigma_2\pi = \sigma$.

On vérifie sans peine que $\varepsilon\sigma_0 = 1_{\mathbf{Z}}$ et $\sigma_0\varepsilon + \beta\sigma_1 = 1_{\mathbf{Z}G}$.

Pour vérifier que $\sigma_1\beta + \alpha\sigma_2 = 1_M$ il suffit de vérifier que pour tout $g \in G$ et $e \in E\setminus\{1\}$ on a $(\sigma_1\beta+\alpha\sigma_2)\pi(ge) = \pi(ge)$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1\beta\pi(ge) + \alpha\sigma_2\pi(ge) &= \sigma_1\bar{\beta}(ge)+\alpha h(g\,;e)\\
&= \sigma_1(g\bar{\beta}(e))+\pi\lambda h(g\,;e)\\
&= \sigma_1(g\mu(e)-g)+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g\mu(e))-\pi(s(g))+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1}+s(g\mu(e))-s(g)-ge)+\pi(ge)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi((s(g)es(g\mu(e))^{-1} - \mu(s(g)e)s(g\mu(e))^{-1} - s(g)e) \\
&\quad + (s(g)e - \mu(s(g))e - s(g)) - (-\mu(s(g\mu(e))s(g\mu(e))^{-1} \\
&\quad - s(g\mu(e)))) + \pi(ge) \\
&= \pi(ge)\,.
\end{aligned}
$$

Finalement pour vérifier que $\sigma_2\alpha = 1_A$ il suffit de se rappeler que $s(1) = 1$.

4.6. Supposons que l'extension de groupes

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

est un autre représentant de $[\xi]$ et soit

$$\eta' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules qui lui est associée.

4.7. Lemme. *Les extensions* η *et* η' *sont équivalentes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe un morphisme de groupes $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\
 & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1
\end{array}
$$

soit commutatif.

Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M \to M'$ tel que le diagramme

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & 1_{\mathbf{Z}G} \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & M' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}
$$

soit commutatif.

On peut étendre l'application $\gamma : E \to E'$ en un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\gamma} : F \to F'$ et comme on a $\bar{\gamma}(L) \subset L'$, on définit φ par la condition $\varphi\pi = \pi'\bar{\gamma}$. On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha = \alpha'$ et $\beta'\varphi = \beta$.

4.8. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([\xi]) = [\eta]$.

4.9. On construit maintenant une application

$$\Psi : \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A) \to e(G\,;A)\,.$$

Soit $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0 .$$

Choisissons un élément $n \in N$ tel que $\gamma(n) = 1$ et une section ensembliste $\sigma : \mathrm{Im}\,\beta \to M$ de β. La dérivation $d_n \in \mathrm{Int}\,(G; N)$ vérifie la condition $\gamma d_n = 0$. On peut donc définir une application $u : G \to M$ en posant $u = \sigma d_n$; autrement dit pour tout $g \in G$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$.

L'application u n'est pas une dérivation, cependant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a $g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2) \in \mathrm{Ker}\,\beta$. On définit alors une application $f : G \times G \to A$ en posant $\alpha f(g_1; g_2) = g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2)$.

Finalement considérons l'ensemble $E = A \times G$ muni de la loi de multiplication donnée par

$$(a_1; g_1)(a_2; g_2) = \big(a_1 + g_1 \cdot a_2 + f(g_1; g_2); g_1 g_2\big) .$$

4.10. Lemme. *E est un groupe.*

Démonstration. On a $\beta u(1) = 0$; donc il existe un unique élément $e \in A$ tel que $\alpha(e) = -u(1)$. On vérifie facilement que l'élément $(e; 1) \in E$ est neutre en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $g \cdot e + f(g; 1) = 0$ et $e + f(1; g) = 0$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\beta\big(g \cdot u(g^{-1}) + u(g)\big) = 0$; on peut donc définir une application $h : G \to A$ en posant

$$\alpha h(g) = g \cdot u(g^{-1}) + u(g) .$$

On vérifie cette fois que l'élément $\big(-g^{-1} \cdot a - g^{-1} \cdot h(g); g^{-1}\big) \in E$ est l'inverse de l'élément $(a; g) \in E$ en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $f(g; g^{-1}) - h(g) = e$ et $f(g^{-1}; g) - g^{-1} \cdot h(g) = e$.

Enfin pour vérifier l'associativité de la loi de multiplication, il suffit de remarquer que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$f(g_1; g_2) + f(g_1 g_2; g_3) - g_1 \cdot f(g_2; g_3) - f(g_1; g_2 g_3) = 0 .$$

4.11. Considérons la suite de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Puisque $e + f(1; 1) = 0$, l'application λ définie en posant $\lambda(a) = (a + e; 1)$ est un morphisme de groupes. D'autre part il est immédiat que l'application μ, définie en posant $\mu(a; g) = g$, est un morphisme de groupes.

4.12. LEMME. *ξ est une extension de groupes telle que l'action de G sur A induite par l'extension est égale à l'action donnée de G sur A.*

Démonstration. Il est immédiat que la suite est exacte.
L'action de G sur A induite par l'extension est donnée par

$$\begin{aligned}\lambda(\theta(g)(a)) &= (0;g)\lambda(a)(0;g)^{-1}\\ &= (g\cdot a+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});gg^{-1})\\ &= (g\cdot a+e-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});1)\\ &= (g\cdot a+e;1)\\ &= \lambda(g\cdot a)\end{aligned}$$

car $-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1})=0$ pour tout $g\in G$.

4.13. On notera avec un $'$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'un élément $n'\in N$ tel que $\gamma(n')=1$ et d'une section ensembliste σ': Im $\beta\to M$ de β.

4.14. LEMME. *Les extensions ξ et ξ' sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de groupes $\delta: E\to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1\\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1\end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\gamma(n-n')=0$ on peut trouver un élément $m\in M$ tel que $\beta(m)=n-n'$.

Maintenant pour tout $g\in G$ on a $\beta(u(g)-u'(g)-g\cdot m+m)=0$; on peut donc définir une application $k: G\to A$ en posant

$$\alpha k(g)=u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2\in G$ on a

$$(f-f')(g_1;g_2)=g_1\cdot k(g_2)+k(g_1)-k(g_1g_2)\,. \tag{4.14.1}$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a;g)=(a+k(g);g)$$

et en utilisant la relation (4.14.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \lambda'$ car $e' = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\mu'\delta = \mu$.

4.15. On notera maintenant avec une $-$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\bar{\eta}: 0 \to A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{M} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathbf{Z} \to 0$$

représentant $[\eta]$.

4.16. Lemme. Les extensions ξ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de vérifier que s'il existe des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules φ et ψ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & N & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & \bar{M} & \xrightarrow[\bar{\beta}]{} & \bar{N} & \xrightarrow[\bar{\gamma}]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif, alors il existe un morphisme de groupes $\delta: E \to \bar{E}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\lambda}]{} & \bar{E} & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\bar{\gamma}(\psi(n) - \bar{n}) = 0$ on peut trouver un élément $\bar{m} \in \bar{M}$ tel que $\bar{\beta}(\bar{m}) = \psi(n) - \bar{n}$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\bar{\beta}(\varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}) = 0$; on peut donc définir une application $k: G \to A$ en posant

$$\bar{\alpha}k(g) = \varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$(f - \bar{f})(g_1; g_2) = g_1 \cdot k(g_2) + k(g_1) - k(g_1 g_2)\,. \tag{4.16.1}$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a; g) = (a + k(g); g)$$

et en utilisant la relation (4.16.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \bar{\lambda}$ car $\bar{e} = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\bar{\mu}\delta = \mu$.

4.17. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\eta]) = [\xi]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

4.18. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{e(G\,;\,A)}$.

Démonstration. Si $[\xi] \in e(G\,;A)$ est représentée par l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

alors $\Psi\Phi([\xi]) = \Psi([\eta]) = [\xi']$ où η est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 1$$

définie aux n°s 4.3 et 4.4, et ξ' est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

qu'on va obtenir en appliquant la construction des n°s 4.9, 4.10 et 4.11.

On peut choisir l'élément $n = 1 \in \mathbf{Z}G$ et définir l'application $u : G \to M$ en composant les applications du diagramme

$$G \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} M\,,$$

où τ est une section ensembliste de μ telle que $\tau(1) = 1$ et i est l'inclusion évidente, car pour tout $g \in G$ on a

$$\beta u(g) = \beta\pi i\tau(g) = \bar{\beta}\tau(g) = \mu\tau(g) - 1 = g - 1\,.$$

L'application $f : G \times G \to A$ qui permet de définir la multiplication du groupe $E' = A \times G$ satisfait donc la condition

$$\alpha f(g_1\,;g_2) = \pi\big(g_1 \cdot \tau(g_2) + \tau(g_1) - \tau(g_1 g_2)\big)\,. \tag{4.18.1}$$

De plus comme $i(1) = 0$ dans F on a $u(1) = 0$ donc $(0\,;1)$ est l'élément neutre de E' et le morphisme λ' est donné par $\lambda'(a) = (a\,;1)$.

Maintenant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a

$$\lambda f(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}\,. \tag{4.18.2}$$

En effet comme $\mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}\big) = 1$ on peut définir une application $\bar{f} : G \times G \to A$ en posant $\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1}$, et en tenant compte de (4.18.1) et de la définition de α dans 4.4 on a

$$\begin{aligned}
\alpha\big(\bar{f}(g_1\,;g_2) - f(g_1\,;g_2)\big) &= \pi\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) - \alpha f(g_1\,;g_2) \\
&= \pi\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1} - g_1\tau(g_2) - \tau(g_1) + \tau(g_1 g_2)\big) \\
&= \pi\big(\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1 g_2)^{-1} - \mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\big)\tau(g_1 g_2)^{-1} - \tau(g_1)\tau(g_2)\big)
\end{aligned}$$

$$+ \left(\tau(g_1)\tau(g_2) - \mu(\tau(g_1))\tau(g_2) - \tau(g_1)\right) - \left(-\mu(\tau(g_1 g_2))\tau(g_1 g_2)^{-1} - \tau(g_1 g_2)\right)\Big) = 0 .$$

Finalement pour montrer que les extensions de groupes ξ' et ξ sont équivalentes, il faut construire un morphisme de groupes $\delta : E' \to E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda'} & E' & \xrightarrow{\mu'} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda]{} & E & \xrightarrow[\mu]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

On pose $\delta(a\,;g) = \lambda(a)\tau(g)$.

En utilisant la formule (4.18.2) on vérifie facilement que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda' = \lambda$ car $\tau(1) = 1$ et il est immédiat que $\mu\delta = \mu'$.

4.19. LEMME. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)}$.

Démonstration. Si $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0$$

alors $\Phi\Psi([\eta]) = \Phi([\xi]) = [\eta']$ où ξ est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie aux n°s 4.9, 4.10 et 4.11 et η' est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

définie aux n°s 4.3 et 4.4.

Pour montrer que les extensions de $\mathbf{Z}G$-modules η' et η sont équivalentes il faut construire des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M' \to M$ et $\psi : \mathbf{Z}G \to N$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Soit F' le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $(A \times G)\backslash\{(e\,;1)\}$ sous-jacent au groupe E et soit $\pi' : F' \to M'$ la projection canonique. Soit

encore $u: G \to M$ l'application définie au n° 4.9. En posant $\bar{\varphi}(a\,;g) = \alpha(a)+u(g)$ et en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\varphi}: F' \to M$ tel que pour tout $(a_1\,;g_1), (a_2\,;g_2) \in E$ on a

$$\bar{\varphi}((a_1\,;g_1)\,(a_2\,;g_2)-\mu(a_1\,;g_1)\cdot(a_2\,;g_2)-(a_1\,;g_1)) = 0$$

Il existe donc un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi: M' \to M$ tel que $\varphi\pi' = \bar{\varphi}$.

Maintenant en posant $\psi(g) = g\cdot n$, où $n \in N$ est l'élément choisi dans la construction de η, et en étendant $\mathbf{Z}$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\psi: \mathbf{Z}G \to N$.

On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha' = \alpha$, $\beta\varphi = \psi\beta'$ et $\gamma\psi = \varepsilon$.

4.20. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\eta_i] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ $(i=1, 2)$ représentée pour la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta_i: 0 \to A \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} N_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $n_i \in N_i$ tel que $\gamma_i(n_i) = 1$. Si $u_i: G \to M_i$ est donnée par la condition $\beta_i u_i(g) = g\cdot n_i - n_i$, on définit $f_i: G \times G \to A$ par la condition $\alpha_i f_i(g_1\,;g_2) = u_i(g_1) + g_1\cdot u_i(g_2) - u_i(g_1 g_2)$. On pose $E_i = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_i.

Alors à l'extension η_i est associée l'extension de groupes

$$\xi_i: 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} G \to 1$$

où $\lambda_i(a) = (a+e_i\,;1)$, avec $\alpha_i(e_i) = -u_i(1)$, et $\mu_i(a\,;g) = g$.

4.21. La somme $[\eta_1] + [\eta_2] = [\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta]$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{lccccccccc}
\eta_1 \oplus \eta_2 & : 0 \to & A \oplus A & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & N_1 \oplus N_2 & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & 1_{A\oplus A}\uparrow & & 1_{M_1\oplus M_2}\uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow\Delta & \\
(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A \oplus A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow[\beta_0]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & \nabla\downarrow & & \psi\downarrow & & 1_N\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & \\
\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0
\end{array}$$

où $\bar{\alpha} = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\bar{\beta} = \beta_1 \oplus \beta_2$, $\bar{\gamma} = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, N est le produit fibré de $\bar{\gamma}$ et Δ et M est le produit cofibré de $\bar{\alpha}$ et ∇.

4.22. Soit H un groupe. On voit immédiatement que la construction des n°s 4.9, 4.10 et 4.11 se généralise en une correspondance entre les 2-extensions d'un $\mathbf{Z}H$-module M par un anneau unitaire commutatif Z sur lequel H agit trivialement, et les extensions de groupes de M par H.

En particulier si on considère $\eta_1 \oplus \eta_2$ comme une 2-extension de $\mathbf{Z}[G \times G]$-modules de $A \oplus A$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, on peut lui associer l'extension de groupes

$$\bar{\xi} : 0 \to A \times A \xrightarrow{\bar{\lambda}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\mu}} G \times G \to 1$$

définie de la façon suivante:

L'élément $\bar{n} = (n_1 ; n_2) \in N_1 \oplus N_2$ satisfait $\bar{\gamma}(\bar{n}) = (1 ; 1)$, donc si on pose $\bar{u} = u_1 \oplus u_2 : G \times G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\bar{\beta}\bar{u}(g ; h) = (g ; h) \cdot \bar{n} - \bar{n}$. On peut alors définir $\bar{f} : (G \times G) \times (G \times G) \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha}\bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = \bar{u}(g_1 ; h_1) + (g_1 ; h_1) \cdot \bar{u}(g_2 ; h_2) - \bar{u}(g_1 g_2 ; h_1 h_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$\bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = (f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(h_1 ; h_2)) . \tag{4.22.1}$$

On pose $\bar{E} = (A \times A) \times (G \times G)$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par $\bar{f}$.

On a $\bar{\lambda}(a ; b) = ((a ; b) + \bar{e} ; (1 ; 1))$, où $\bar{e} = (e_1 ; e_2)$, et $\bar{\mu}((a ; b) ; (g ; h)) = (g ; h)$.

4.23. Lemme. *Les extensions de groupes* $\xi_1 \times \xi_2$ *et* $\bar{\xi}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Compte tenu de la formule (4.22.1) l'application $\delta : \bar{E} \to E_1 \times E_2$, définie en posant

$$\delta((a ; b) ; (g ; h)) = ((a ; g) ; (b ; h)) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{lccccccccc}
\bar{\xi} & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to 1 \\
 & & 1_{A \times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{G \times G} & \\
\xi_1 \times \xi_2 & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow[\lambda_1 \times \lambda_2]{} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow[\mu_1 \times \mu_2]{} & G \times G & \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.24. Maintenant à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta$ on associe l'extension de groupes

$$\xi_0 : 0 \to A \times A \xrightarrow{\lambda_0} E_0 \xrightarrow{\mu_0} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Comme $\bar{\gamma}(\bar{n}) = \Delta(1)$ l'élément $n = (\bar{n}; 1) \in N$ et satisfait $\gamma(n) = 1$; donc si on pose $u_0 = u_1 \oplus u_2 : G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\beta_0 u_0(g) = g \cdot n - n$. On peut alors définir $f_0 : G \times G \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha} f_0(g_1 ; g_2) = u_0(g_1) + g_1 \cdot u_0(g_2) - u_0(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f_0(g_1 ; g_2) = \big(f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(g_1 ; g_2)\big) . \tag{4.24.1}$$

On pose $E_0 = (A \times A) \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_0.

On a $\lambda_0(a ; b) = \big((a ; b) + \bar{e} ; 1\big)$ et $\mu_0\big((a ; b) ; g\big) = g$.

4.25. Lemme. *Les extensions de groupes* $\bar{\xi}\Delta$ *et* ξ_0 *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{lccccccccc}
\bar{\xi} & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to & 1 \\
 & & 1_{A \times A} \uparrow & & \omega \uparrow & & \uparrow \Delta & & \\
\bar{\xi}\Delta & : 0 \to & A \times A & \underset{\bar{\lambda}'}{\to} & \bar{E}' & \underset{\bar{\mu}'}{\to} & G & \to & 1
\end{array}$$

où $\bar{E}'$ est le produit fibré de $\bar{\mu}$ et Δ; donc un élément de $\bar{E}'$ est de la forme $\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big)$.

Compte tenu de la formule (4.24.1) l'application $\delta : \bar{E}' \to E_0$, définie en posant

$$\delta\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big) = \big((a ; b) ; g\big) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{lccccccccc}
\bar{\xi}\Delta & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}'} & \bar{E}' & \xrightarrow{\bar{\mu}'} & G & \to & 1 \\
 & & 1_{A \times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\
\xi_0 & : 0 \to & A \times A & \underset{\lambda_0}{\to} & E_0 & \underset{\mu_0}{\to} & G & \to & 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.26. Finalement à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\nabla((\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta)$ on associe l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Si on pose $u = \psi u_0 : G \to M$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$, donc on peut définir $f : G \times G \to A$ par la condition

$$\alpha f(g_1 ; g_2) = u(g_1) + g_1 \cdot u(g_2) - u(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$f(g_1 ; g_2) = f_1(g_1 ; g_2) + f_2(g_1 ; g_2) . \tag{4.26.1}$$

On pose $E = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f.

On a $\lambda(a) = (a + \nabla \bar{e} ; 1)$ et $\mu(a ; g) = g$.

4.27. Lemme. *Les extensions de groupes* $\nabla\xi_0$ *et* ξ *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi_0 & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\lambda_0} & E_0 & \xrightarrow{\mu_0} & G & \to 1 \\
 & & \nabla \downarrow & & \omega_0 \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\nabla\xi_0 & : 0 \to & A & \xrightarrow[\lambda'_0]{} & E'_0 & \xrightarrow[\mu'_0]{} & G & \to 1
\end{array}$$

où E'_0 est le produit cofibré de λ_0 et ∇.

Compte tenu de la formule (4.26.1) l'application $\omega : E_0 \to E$, définie en posant $\omega((a ; b) ; g) = (\nabla(a ; b) ; g)$, est un morphisme de groupes tel que $\omega\lambda_0 = \lambda\nabla$ et $\mu\omega = \mu_0$. D'après la propriété universelle du produit cofibré il existe donc un morphisme de groupe $\delta : E'_0 \to E$ tel que $\delta\lambda'_0 = \lambda$ et $\delta\omega_0 = \omega$.

On peut donc considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\nabla\xi_0 & : 0 \to & A & \xrightarrow{\lambda'_0} & E'_0 & \xrightarrow{\mu'_0} & G & \to 1 \\
 & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\xi & : 0 \to & A & \xrightarrow[\lambda]{} & E & \xrightarrow[\mu]{} & G & \to 1
\end{array}$$

dans lequel le premier carré est commutatif. Le deuxième carré est aussi commutatif car on a $\mu\delta\omega_0 = \mu'_0\omega_0$ et ω_0 est surjectif car ∇ est surjectif.

4.28. La relation d'équivalence entre extensions étant stable vis-à-vis des produits fibrés et cofibrés, les résultats précédents donnent

$$\begin{aligned}\Psi([\eta_1]) + \Psi([\eta_2]) &= [\nabla(\xi_1 \times \xi_2)\Delta] = [\nabla\bar{\xi}\Delta] \\ &= [\nabla\xi_0] = [\xi] = \Psi([\nabla(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta]) = \Psi([\eta_1]+[\eta_2]).\end{aligned}$$

(Reçu le 8 juillet 1987)

Pierre-Paul Grivel

Université de Genève
Section de mathématiques
Rue du Lièvre 2-4
CH — 1211 Genève 24

vide-leer-empty