3. Le groupe $H^1(G;A)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F : h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}\,.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma : G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma : G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = (f_\sigma(g)\,;g)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $(f_{\sigma'}(g)\,;g) = (a + f_\sigma(g) - g \cdot a\,;g)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)\,.$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.

3.2. THÉORÈME. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(G\,;A) = h(G\,;A)\,.$$

3.3. Pour construire l'application Φ on commence par considérer l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\theta : 0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Soit $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$ représentée par une dérivation $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$; d'après la proposition 2.5 on peut associer à f un morphisme $\tilde{f} = \omega(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;A)$.

En faisant le produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ on obtient l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Le $\mathbf{Z}G$-module F est le quotient de $\mathbf{Z}G \times A$ par le sous-module engendré par l'ensemble $\{(i(x)\,; -\tilde{f}(x)) \mid x \in IG\}$. Si $\pi : \mathbf{Z}G \times A \to F$ est la projection canonique, les morphismes α et β sont définis en posant $\alpha(a) = \pi(0\,;a)$ et $\beta\pi(x\,;a) = \varepsilon(x)$.

Si $f' \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ est un autre représentant de $[f]$ on lui associe de la même façon l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}'\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

3.4. LEMME. *Les extensions* $\tilde{f}\theta$ *et* $\tilde{f}'\theta$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : F \to F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & F' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Par hypothèse il existe $b \in A$ tel que $f' - f = f_b$ où $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\Delta : \mathbf{Z}G \times A \to \mathbf{Z}G \times A$$

en posant $\Delta(x\,;a) = (x\,;a - x \cdot b)$.

Si $x \in IG$ on peut écrire $x = \sum_{g \in G} n_g(g-1)$ si bien qu'en utilisant la proposition 2.5 on a

$$x \cdot b = \sum_{g \in G} n_g(g \cdot b - b) = \sum_{g \in G} n_g f_b(g) = \sum_{g \in G} n_g \tilde{f}_b(g-1)$$
$$= \tilde{f}_b\big(\sum_{g \in G} n_g(g-1)\big) = \tilde{f}_b(x).$$

On a donc $\Delta(x\,;-\tilde{f}(x)) = (x\,;-\tilde{f}(x)-\tilde{f}_b(x)) = (x\,;-\tilde{f}'(x))$ et on définit δ par la condition $\pi'\Delta = \delta\pi$.

On vérifie immédiatement que $\delta\alpha = \alpha'$ et $\beta'\delta = \beta$.

3.5. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([f]) = [\tilde{f}\theta]$.

3.6. On construit maintenant une application

$$\Psi : \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}.$$

Soit $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0.$$

Choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$ et considérons la dérivation $f_e \in \mathrm{Int}\,(G\,;E)$.

Comme on a $\mu f_e = 0$ on peut définir une application $f^e : G \to A$ par la condition $\lambda f^e = f_e$.

3.7. Lemme. *$f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ et $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.*

Démonstration. Pour tous $g, h \in G$ on a

$$\lambda f^e(gh) = (gh)\cdot e - e = g\cdot(h\cdot e - e) + g\cdot e - e$$
$$= g\cdot\lambda f^e(h) + \lambda f^e(g)$$
$$= \lambda\big(g\cdot f^e(h) + f^e(g)\big).$$

Comme λ est injectif il en résulte que $f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$. Soit $e' \in E$ tel que $\mu(e') = 1$; puisque $\mu(e-e') = 0$ il existe $b \in A$ tel que $\lambda(b) = e - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\lambda(f^e - f^{e'})(g) = (g\cdot e - e) - (g\cdot e' - e')$$
$$= g\cdot\lambda(b) - \lambda(b)$$
$$= \lambda(g\cdot b - b) = \lambda f_b(g).$$

Ainsi $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$ et par suite $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.

3.8. Supposons maintenant que l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} \mathbf{Z} \to 0$$

est un autre représentant de $[\xi]$.

En choisissant un élément $e' \in E'$ tel que $\mu'(e') = 1$ on définit une dérivation $f^{e'} \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

3.9. LEMME. $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

Démonstration. Les extensions ξ et ξ' étant équivalentes, il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\lambda'}{\to} & E' & \underset{\mu'}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme $\mu'(\gamma(e)-e') = 0$, il existe $b \in A$ tel que $\lambda'(b) = \gamma(e) - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \gamma\lambda(f^e - f^{e'})\,(g) &= \gamma\lambda f^e(g) - \lambda' f^{e'}(g) \\ &= \gamma(g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot (\gamma(e) - e') - (\gamma(e) - e') \\ &= \lambda'(g \cdot b - b) \\ &= \gamma\lambda f_b(g)\,. \end{aligned}$$

Comme γ est un isomorphisme et λ est injectif il en résulte que $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

3.10. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\xi]) = [f^e]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

3.11. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{\frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}}$.

Démonstration. Si $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$ est représentée par $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ alors $\Psi\Phi([f]) = \Psi([\tilde{f}\theta])$ où $\tilde{f}\theta$ est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0$$

décrite au n° 3.3.

Par définition du produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : \mathbf{Z}G \to F$, défini par $\gamma(x) = \pi(x\,;0)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & IG & \xrightarrow{i} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & \tilde{f}\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

L'élément $e = \pi(1\,;0) \in F$ vérifie la condition $\beta(e) = 1$; donc $\Psi([\tilde{f}\theta])$ est représentée par la dérivation $f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\alpha f^e(g) = g \cdot e - e = \pi(g-1\,;0)$.

Or on a $f^e = f$; en effet, compte tenu de la proposition 2.5 on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^e - f)\,(g) &= \alpha f^e(g) - \alpha\tilde{f}(g-1) \\ &= \alpha f^e(g) - \gamma(g-1) \\ &= \pi(g-1\,;0) - \pi(g-1\,;0) = 0\,. \end{aligned}$$

3.12. Lemme. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)}$.

Démonstration. Soit $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0$$

et choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$; on a alors $\Phi\Psi([\xi]) = [\tilde{f}^e\theta]$.

Il s'agit donc de démontrer que les extensions ξ et $\tilde{f}^e\theta$ sont équivalentes; pour cela il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : E \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si $u \in E$ on a $\mu(u - \mu(u)e) = 0$; on peut donc définir un morphisme de groupes abéliens $\upsilon : E \to A$ tel que $\lambda\upsilon(u) = u - \mu(u)e$ pour tout $u \in E$.

Définissons alors δ en posant $\delta(u) = \pi(\mu(u)\,;\upsilon(u))$. Il faut vérifier que δ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules; or si $g \in G$ et $u \in E$ on a

$$g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = \pi(\mu(u)\,(g-1)\,;g \cdot \upsilon(u) - \upsilon(g \cdot u))\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}\lambda(g\cdot\upsilon(u)-\upsilon(g\cdot u)) &= g\cdot(u-\mu(u)e)-(g\cdot u-\mu(u)e)\\ &= -\,\mu(u)\,(g\cdot e-e)\\ &= -\,\mu(u)\lambda f^{e}(g)\\ &= \lambda(-\mu(u)\tilde{f}^{e}(g-1))\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que $g\cdot\delta(u)-\delta(g\cdot u)=0$.

Finalement on vérifie immédiatement que $\delta\lambda=\alpha$ et $\beta\delta=\mu$.

3.13. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\xi_i]\in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A)$ $(i=1,2)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi_i : 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $e_i\in E_i$ tel que $\mu_i(e_i)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_i}\in \mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_i f^{e_i}(g)=g\cdot e_i-e_i$.

On a alors $\Psi([\xi_1])+\Psi([\xi_2])=[f^{e_1}]+[f^{e_2}]=[f^{e_1}+f^{e_2}]$.

Maintenant $[\xi_1]+[\xi_2]$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\xi_0=\nabla(\xi_1\oplus\xi_2)\Delta$ et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\lambda_1\oplus\lambda_2"] & E_1\oplus E_2 \arrow[r, "\mu_1\oplus\mu_2"] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[u, "\nabla"] & E \arrow[r, "\mu"'] \arrow[u, "\gamma"] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "1_{\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda_0"'] \arrow[u, "1_A"] & E_0 \arrow[r, "\mu_0"'] \arrow[u, "\delta"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{3.13.1}$$

On choisit un élément $e_0\in E_0$ tel que $\mu_0(e_0)=1$ et on considère la dérivation $f^{e_0}\in \mathrm{Der}\,(G;A)$ définie par $\lambda_0 f^{e_0}(g)=g\cdot e_0-e_0$.

On a alors $\Psi([\xi_1]+[\xi_2])=[f^{e_0}]$.

3.14. Lemme. $f^{e_1}+f^{e_2}-f^{e_0}\in \mathrm{Int}\,(G;A)$.

Démonstration. Comme $\mu(\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0))=0$, il existe un élément $a\in A$ tel que $\lambda(a)=\gamma(e_1;e_2)-\delta(e_0)$. Considérons la dérivation $f_a\in \mathrm{Int}\,(G;A)$. Pour tout $g\in G$ on a, compte tenu du diagramme (3.13.1),

$$\lambda(f^{e_1}(g)+f^{e_2}(g)-f^{e_0}(g)-f_a(g))=0\,.$$