2. Périodicité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

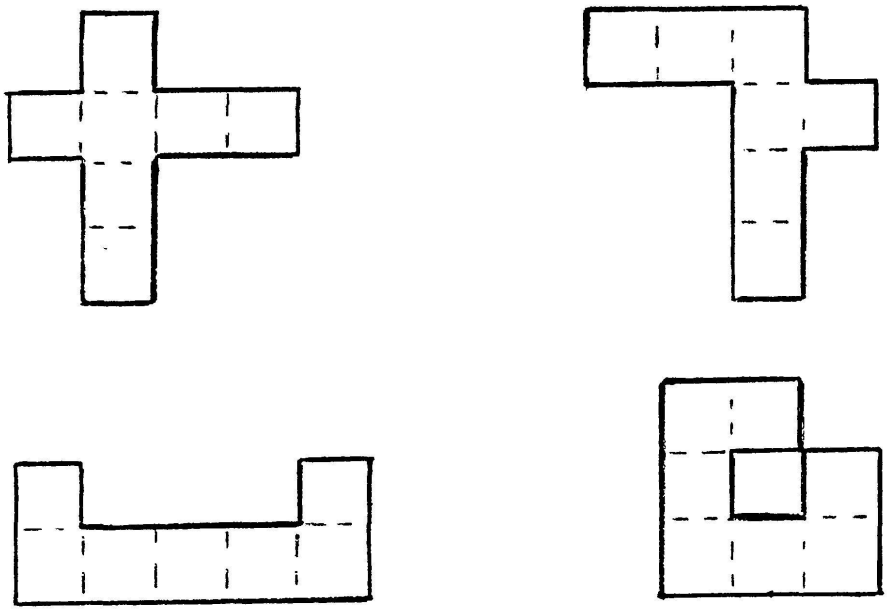
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch



Les 4 heptominos qui ne pavent pas.

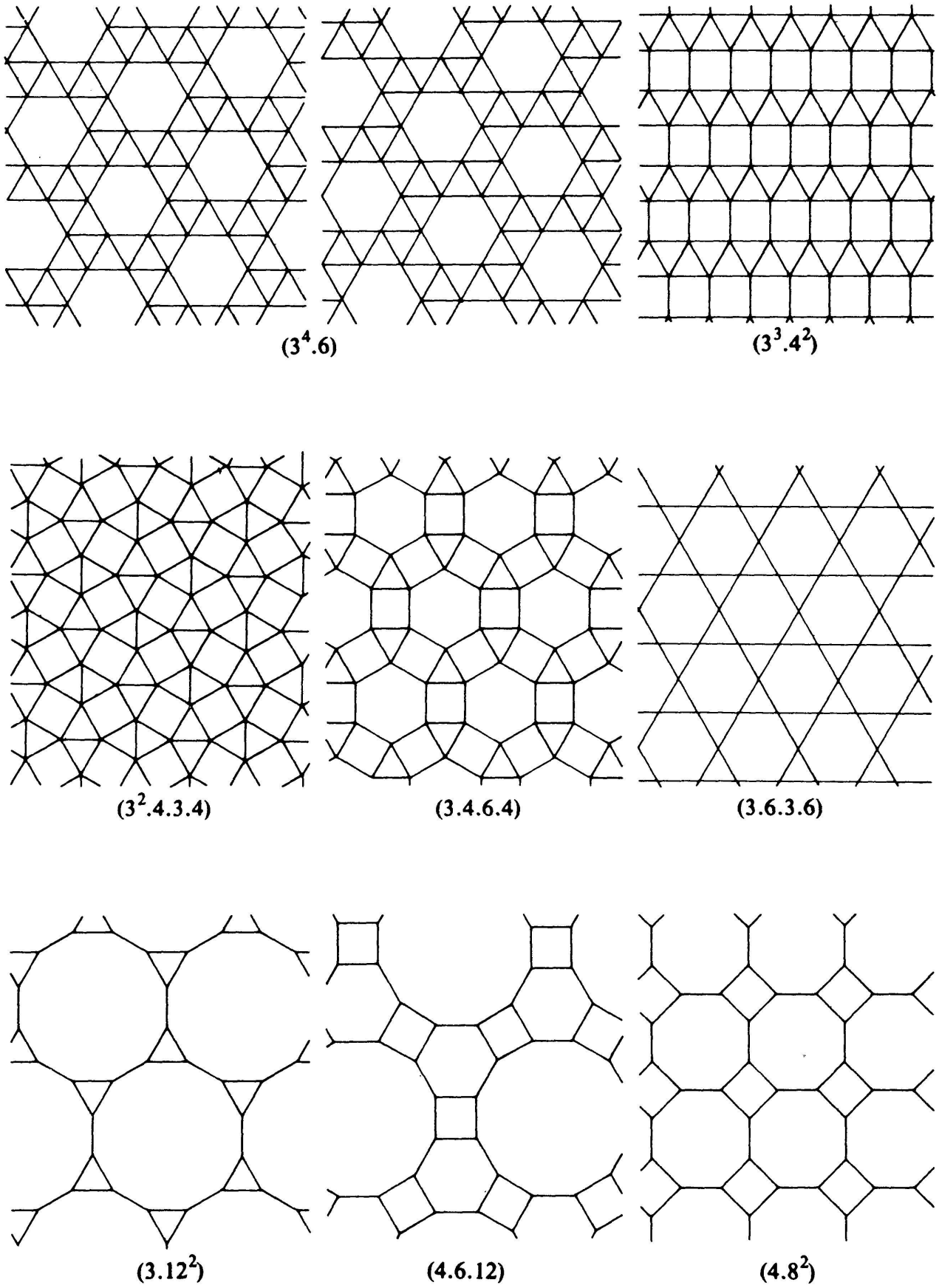
De même, il y a 369 octominos dont 343 pavent le plan. En revanche, le domino, les 2 triminos, les 5 quadriminos, les 12 pentominos et les 35 hexominos pavent tous le plan (Gardner, août 1975).

2. Périodicité

Une *généralisation naturelle* possible du problème discuté jusqu'ici se formule comme suit: soit $P_1, P_2, ..., P_k$ une famille (finie) de polygones plans, considérés comme briques modèles (on n'a plus nécessairement $k = 1$, et les polygones peuvent être non convexes). Existe-t-il un pavage du plan par des polygones dont chacun est superposable à l'un des modèles? Et si oui, quelles sont les propriétés des pavages possibles?

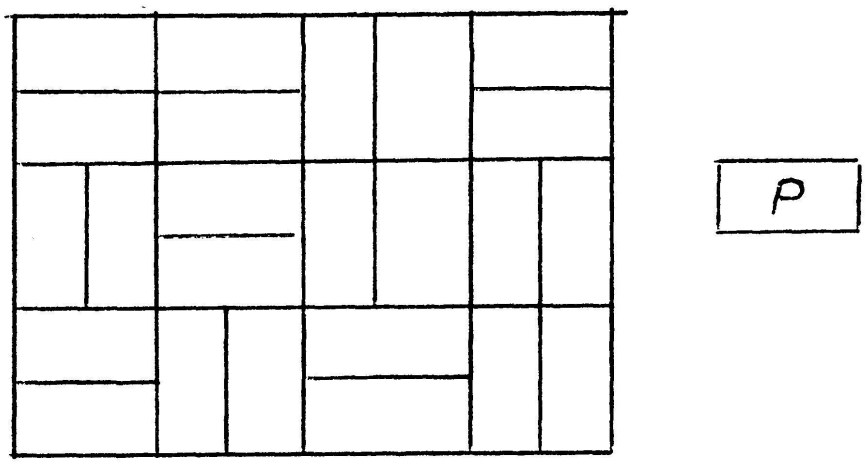
Avant de formuler des problèmes ouverts, évoquons à titre d'exemple une famille remarquable de tels pavages, pour chacun desquels on a $k = 2$ ou $k = 3$. Ce sont des pavages dits semi-réguliers: chaque tuile est un polygone régulier, deux tuiles qui se touchent ont en commun un sommet ou un côté entier, et les sommets du pavage « ont tous le même type ». C'est à nouveau Képler qui le premier a vu (montré?) que la figure suivante donne à changement d'échelle près tous les pavages semi-réguliers non réguliers. La figure est recopiée de (Grünbaum et Shephard, 1981).

On dit qu'un pavage est *périodique* s'il existe deux translations de directions distinctes qui transforment le pavage en lui-même.

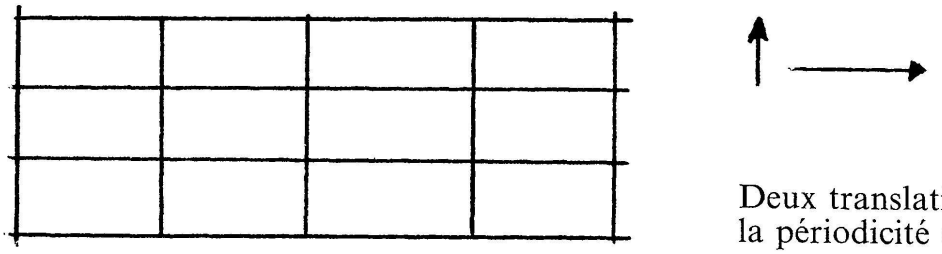


Les huit pavages uniformes non réguliers. Dans chacun d'eux, les briques sont des polygones réguliers, et il existe des symétries du pavage qui appliquent tout sommet donné sur tout autre sommet. L'un des pavages (désigné par $(3^4.6)$) se présente sous deux aspects, comme une image et sa réflexion dans un miroir. C'est sans doute Képler, au début du XVIIe, qui a découvert et compris ces pavages comme constituant une famille.

Comme premier exemple, considérons une famille $P_1, ..., P_k$ réduite à un unique rectangle P ($k=1$), deux fois plus long que large. Il est facile de construire un pavage *non* périodique avec des copies de P, par exemple en partageant « au hasard » les carrés d'un pavage régulier :

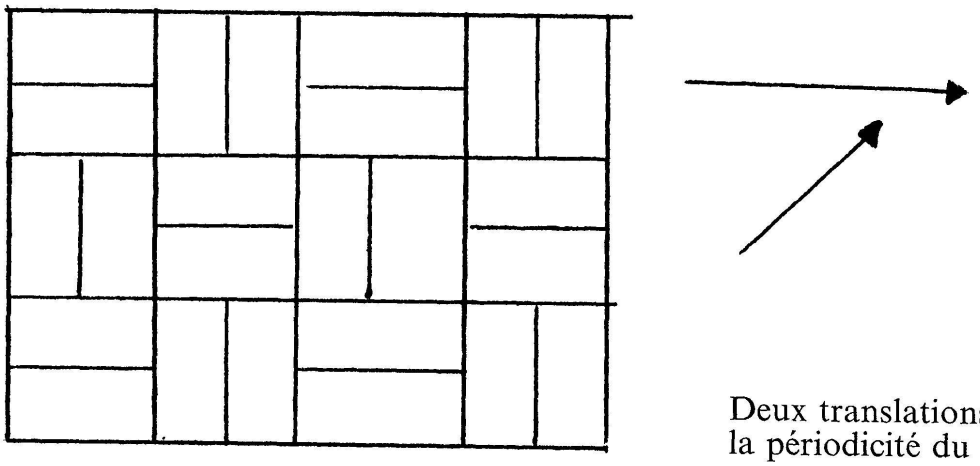


Mais, encore plus évidemment, le même rectangle pave aussi périodiquement :



Deux translations montrant la périodicité du pavage.

ou encore :



Deux translations montrant la périodicité du pavage.

PROBLÈME OUVERT: existe-t-il un polygone qui pave le plan, mais qui ne peut pas paver le plan périodiquement?

(Digression pour mathématiciens: Dans la deuxième partie de son 18e problème, Hilbert demande s'il existe un polygone qui pave le plan, mais qui ne puisse pas être domaine fondamental du groupe des symétries d'un pavage. La réponse est oui. Après un exemple compliqué en dimension 3 dû à K. Reinhardt (1928), la réponse a été donnée en 1935 par Heesch qui a trouvé un décagone (non convexe) convenable. Enfin Kershner a trouvé 3 types de pentagones convexes qui répondent à la question de Hilbert. Toutefois ces exemples permettent de paver le plan périodiquement: les pavages ont une cellule fondamentale formée d'un nombre fini de copies du modèle, et cette cellule se répète périodiquement; voir les pavages hexagonaux du § 1.)

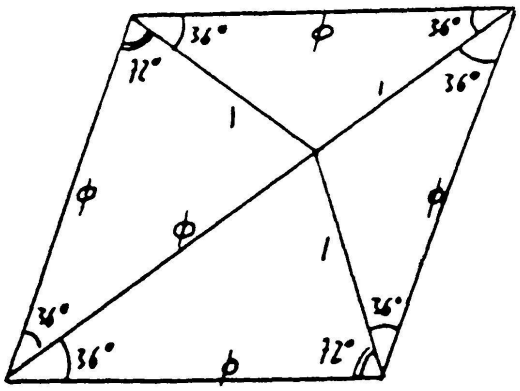
L'analogue du problème précédent pour une famille $P_1, P_2, ..., P_k$ avec $k > 1$ a été résolu, assez récemment. On connaît en effet des exemples de telles familles qui pavent le plan mais qui ne peuvent pas paver le plan périodiquement pour

$k > 1000$	(R. Berger, 1964)
$k = 6$	(R. M. Robinson, 1971)
$k = 2$	(R. Penrose, 1974).

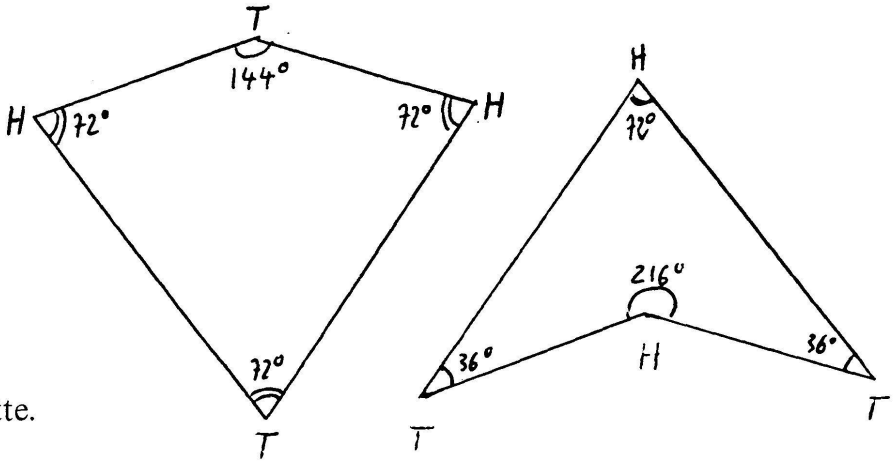
Décrivons comme suit la famille de Penrose. On considère d'abord un losange dont les angles aigus mesurent $2\pi/5 = 72^\circ$ et les angles obtus $3\pi/5 = 108^\circ$, et dont les côtés ont une longueur (dans une unité convenable) de

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803...$$

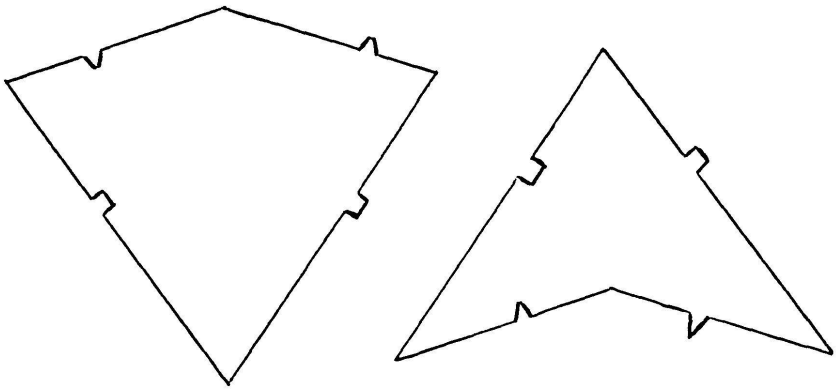
On divise la longue diagonale en deux segments de longueurs ϕ et 1, on joint le point de division aux deux sommets obtus du losange, et on découpe selon ces jointures. On obtient ainsi deux quadrilatères appelés *cerf-volant* et *fléchette*, qui sont essentiellement les deux briques de Penrose. De plus, on marque chaque sommet par H ou T comme indiqué sur la figure, et on interdit aux pavages d'accoler un sommet du type T et un sommet du type H. L'interdiction peut être matérialisée par des saillies et encoches de deux types, de sorte que l'assemblage de briques superposables à l'un des deux modèles devient un problème de puzzle ordinaire.



Le losange.

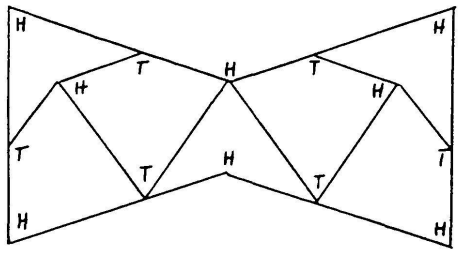


Le cerf-volant et la fiéchette.

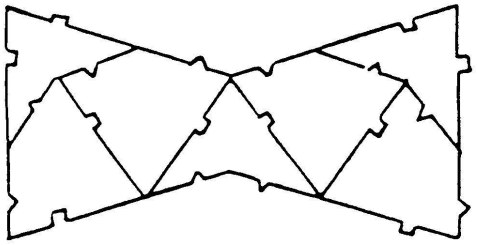


Avec saillies et encoches.

Voici, à une échelle différente, la représentation d'un puzzle assemblé, d'abord avec les sommets marqués T ou H :



et ensuite avec les saillies et encoches:



Il y a une infinité de manières d'assembler cerf-volants et fléchettes pour former des pavages du plan. Ces pavages ont des propriétés propres à rendre perplexes les plus blasés, par exemple:

(i) il n'existe aucune translation transformant aucun de ces pavages en lui-même,

(ii) toute partie finie d'un pavage est répétée une infinité de fois dans ce pavage (!)

(iii) étant donnés deux pavages et une partie finie de l'un d'entre eux, elle se retrouve dans l'autre (bien que les deux pavages soient globalement distincts).

La propriété (ii) est typique de ce qu'on appelle la *quasi-périodicité.*

La figure suivante représente un puzzle plus grand, avec les cerfs-volants en blanc et les fléchettes en noir (le lecteur doit imaginer des séparations entre fléchettes juxtaposées). Je remercie J. P. Eckmann qui a programmé son ordinateur pour ce dessin.