**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 35 (1989)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

**Autor:** Carrière, Yves / Dal'bo, Françoise

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-57376

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 06.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

*L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 245-262*

# GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

par Yves CARRIÈRE et Françoise DAL'BO

## INTRODUCTION

On dira qu'un groupe a *virtuellement* la propriété $P$ s'il contient un sous-groupe d'indice fini vérifiant $P$. Le premier théorème de Bieberbach [Bi] concerne la classification « virtuelle » des sous-groupes discrets du groupe d'isométries $E(n)$ de l'espace euclidien $E^n$.

THÉORÈME DE BIEBERBACH ([W1]). *Un sous-groupe discret* $\Gamma$ *de* $E(n)$ *est virtuellement abélien. Si de plus,* $\Gamma$ *est cristallographique (i.e. si* $E^n/\Gamma$ *est compact), alors* $\Gamma$ *est virtuellement constitué de translations.*

C'est en fait ce dernier cas qui était traité par Bieberbach. L'énoncé géométrique correspondant étant que toute variété riemannienne plate *compacte* est à revêtement fini près un tore plat (i.e. le quotient de $E^n$ par un groupe $\mathbf{Z}^n$ de translations). Le cas général traité par Wolf permet, lui, d'affirmer qu'une variété riemannienne plate supposée seulement *complète* est à revêtement fini près topologiquement un cylindre.

Le but de ce texte est de fournir une introduction à ce que nous estimons être des généralisations plus ou moins lointaines de ce théorème. Dès le § 1, nous démontrons un théorème de Bieberbach (1.2.1) pour les sous-groupes discrets du groupe affine $Aff(\mathbf{R}^n)$ qui améliore un résultat provenant du travail d'Auslander [Au] utile dans l'étude des variétés affines complètes. La démonstration est, comme celle de Buser [Bu], inspirée par les variétés presque plates [Gro1] mais elle a l'avantage d'être un peu plus conceptuelle et de fournir, de ce fait, directement le cas général. Le § 2 est destiné à introduire les notions de moyennabilité et de croissance polynomiale ainsi que leur lien avec les propriétés algébriques de résolubilité et de nilpotence. Nous rappelons rapidement les travaux de Milnor [M1-2], Wolf [W2], Tits [T], etc., permettant d'analyser les propriétés algébriques des sous-groupes discrets des groupes de Lie moyennables et de retrouver ainsi le théorème de Bieberbach. Les § 1 et § 2 sont utilisés au § 3 pour

donner une preuve simplifiée d'un résultat de Goldman et Kamishima [GK] qui, joint à [C2] fournit le théorème de Bieberbach lorentzien: *une variété lorentzienne plate compacte est à revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau).* Un preprint récent de Grunewald et Margulis [GM] précise la nature des réseaux concernés prolongeant ainsi le travail de Fried [Fr2] en dimension 4. Le § 4 est un survol rapide de quelques autres généralisations.

*Convention:* Le terme « groupe de Lie » est pour nous synonyme de « groupe de Lie connexe ».

Nous tenons à remercier A. Haefliger et P. de la Harpe pour les critiques et les commentaires qu'ils ont ajoutés à ce texte.

## 1. Dans $Aff(\mathbf{R}^n)$

Nous allons donner une preuve et une généralisation du théorème de Bieberbach qui est élémentaire si le lecteur sait qu'un groupe linéaire nilpotent admet une décomposition de Jordan (cf. 1.2). L'idée naturelle de généralisation ici est de remplacer $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ par le groupe de toutes les transformations affines $Aff(\mathbf{R}^n) = GL(\mathbf{R}^n) \ltimes \mathbf{R}^n$. La perte de compacité du quotient dans le produit semi-direct se retrouve dans la conclusion plus faible (mais à notre avis optimale) du théorème obtenu (1.2.1).

1.1. Nilpotence et commutateurs dans un groupe de Lie. Soit $\Gamma$ un groupe. *La suite centrale* $\Gamma^{(k)}$ *dérivée de* $\Gamma$ est définie par $\Gamma^{(0)} = \Gamma$ et la relation de récurrence $\Gamma^{(k+1)} = [\Gamma, \Gamma^{(k)}]$ où le crochet désigne le *commutateur* des sous-groupes concernés de $\Gamma$. Le groupe $\Gamma$ est *nilpotent* de degré $d$ si la suite centrale dérivée $\Gamma^{(k)}$ devient triviale à partir de $k = d$. On a le lemme suivant résultant d'une récurrence sur $d$:

1.1.1. Lemme. *Pour que* $\Gamma$ *soit nilpotent de degré* $d$, *il faut et il suffit que pour un système générateur* $\Sigma$ *de* $\Gamma$ *on ait*

$$[\gamma_0, [\gamma_1, [\cdots [\gamma_{d-1}, \gamma_d] \cdots] = e, \qquad \forall \gamma_0, \ldots, \gamma_d \in \Sigma .$$

Autrement dit, la nilpotence d'un groupe se lit sur l'un quelconque de ses systèmes générateurs. Considérons maintenant un groupe de Lie $G$. L'application commutateur: $(x, y) \in G \times G \mapsto [x, y] \in G$ a en l'élément neutre $(e, e) \in G \times G$ ses deux applications partielles $x \in G \mapsto [x, e]$ et $y \in G \mapsto [e, y]$ constantes égales à $e$. Par conséquent, le développement de Taylor de $[.,.]$ en $(e, e)$ n'a que des termes où $x, y$ interviennent simultanément. D'où la

1.1.2. PROPRIÉTÉ DE CONTRACTION DES COMMUTATEURS. *Pour toute constante* $c, 0 < c < 1$, *il existe un voisinage compact* $D$ *de* $e \in G$ *et des coordonnées locales centrées en* 0 *(coordonnées de e) telles que l'on ait*

$$\forall x, y \in D, \quad \|[x, y]\| \leqslant c \, \| x \| \, . \, \| y \|$$

*où* $\| \, . \, \|$ *désigne la norme euclidienne sur l'espace des coordonnées.*

Il est clair que l'on peut supposer en plus $[D, D] \subset D$. On dit alors que $D$ est *un domaine de contraction des commutateurs.* Le lemme suivant énoncé dans [Ra] et [W1] est attribué à Zassenhaus:

1.1.3. LEMME. *Tout sous-groupe discret* $\Gamma$ *de* $G$ *ayant un système générateur* $\Sigma \subset D$ *est nilpotent.*

Ce lemme résulte directement de ce qui précède. Il nous semble contenir la clé de toute tentative de généralisation du premier théorème de Bieberbach.

1.2. LE THÉORÈME DE BIEBERBACH DANS $Aff(\mathbf{R}^n)$. Nantis de ces préliminaires, nous allons nous intéresser au cas où $G = Aff(\mathbf{R}^n)$. On notera $L: Aff(\mathbf{R}^n) \to GL(\mathbf{R}^n)$ le morphisme qui à une transformation affine $Ax + b$ associe sa partie linéaire $A$. Soit $\Gamma$ un sous-groupe de $Aff(\mathbf{R}^n)$ et $\overline{L(\Gamma)}^{\circ}$ la composante connexe neutre de l'adhérence de $L(\Gamma)$. On notera

$$L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^{\circ}$$

ce que l'on pourrait appeler « la partie non discrète de $L(\Gamma)$ » et $\Gamma_{nd} = \Gamma \cap L^{-1}(L(\Gamma)_{nd})$ le sous-groupe de $\Gamma$ correspondant. Remarquons qu'*a priori*, la discrétion de $\Gamma$ n'implique pas celle de $L(\Gamma)$.

Un résultat de L. Auslander [Au] (cf. [R], theorem 8.24), utilisé dans l'étude des groupes affines cristallographiques ([FG], [GK] cf. 4.1), permet d'affirmer que si $\Gamma$ est discret dans $Aff(\mathbf{R}^n)$ alors $L(\Gamma)_{nd}$ (et donc $\Gamma_{nd}$) est résoluble. Nous allons démontrer le théorème plus précis suivant qui semble être la bonne généralisation de Bieberbach dans cette direction:

1.2.1. THÉORÈME. *Si* $\Gamma$ *est un sous-groupe discret dans* $Aff(\mathbf{R}^n)$ *alors* $\Gamma_{nd}$ *est nilpotent (de type fini d'après 2.1.4). Si de plus* $\Gamma$ *est cristallographique (i.e.* $M = \mathbf{R}^n/\Gamma$ *est une variété compacte) alors* $\Gamma_{nd}$ *est unipotent (i.e.* $L(\Gamma)_{nd}$ *est unipotent).*

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, rappelons un résultat sur les représentations affines nilpotentes. On voit d'abord $Aff(\mathbf{R}^n)$ comme sous-groupe algébrique via le plongement habituel $Aff(\mathbf{R}^n) \to GL(\mathbf{R}^{n+1})$ qui à

la transformation affine $Ax + b$ associe la matrice $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathbf{R}^{n+1})$. Soit $N$ un sous-groupe nilpotent de $Aff(\mathbf{R}^n)$ et $N'$ son adhérence dans $Aff(\mathbf{R}^n)$ pour la topologie de Zariski. La composante neutre $N'_0$ est un groupe de Lie nilpotent connexe d'indice fini dans $N'$. Le groupe $N_0 = N \cap N'_0$ est aussi d'indice fini dans $N$ et on a (cf. theorem 1.7 de [FGH]):

1.2.2. PROPOSITION. *Il existe un unique sous-espace affine $U$ invariant par $N_0$ et maximal parmi les sous-espaces sur lesquels $N_0$ est unipotent. Ce sous-espace (l'« axe » de $N$) est invariant par le normalisateur de $N$.*

*Démonstration.* Un sous-groupe de $Aff(\mathbf{R}^n)$ peut être vu comme sous-groupe de $GL(\mathbf{R}^{n+1})$ stabilisant la forme linéaire donnée par la dernière coordonnée $x_{n+1}$. Considérons donc le sous-groupe de Lie connexe nilpotent $N'_0$ dans $GL(\mathbf{R}^{n+1})$. D'après ([Bo], theorem 10.6), $N'_0$ admet une décomposition de Jordan, $\mathbf{R}^{n+1}$ se décompose donc en somme directe d'un sous-espace unipotent stable maximal $V_1$ et d'un autre sous-espace invariant $V_2$. Le fait que $N'_0$ provienne de $Aff(\mathbf{R}^n)$ assure que $V_1$ n'est pas trivial. Nécessairement $V_2$ ne coupe pas l'espace affine $x_{n+1} = 1$ car sinon l'action de $N'_0$ en restriction à l'intersection fournirait un espace unipotent, ce qui contredirait la maximalité de $V_1$. On en déduit que $U = V_1 \cap (x_{n+1} = 1)$ est non vide. Le normalisateur de $N$ normalise aussi $N'_0$ et donc stabilise $U$. $\square$

Dans le cas où $\Gamma$ est dans $E(n)$, c'est-à-dire où $L(\Gamma) \subset O(n)$, alors $\overline{L(\Gamma)}$ est compact et donc n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Par conséquent, $\overline{L(\Gamma)}^{\circ}$ est d'indice fini dans $\overline{L(\Gamma)}$, ce qui prouve que $\Gamma_{nd}$ a un indice fini dans $\Gamma$. D'après 1.2.1, $\Gamma_{nd}$ est nilpotent. L'énoncé de Bieberbach suit alors du lemme suivant appliqué à $N = \Gamma_{nd}$:

1.2.3. LEMME. *Tout sous-groupe nilpotent $N$ de $E(n)$ contient un sous-groupe d'indice fini $N_0$ abélien. Si de plus $N$ est un groupe cristallographique, alors $N_0$ est engendré par $n$ translations linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* Reprenons la conclusion de la proposition précédente dans le cas où $N \subset E(n)$. L'action de $N_0$ sur l'axe $U$ est par translations pures, donc abélienne. Celle dans la direction normale à $U$ (i.e. dans $V_2$) est linéaire, triangulable et orthogonale donc diagonalisable (complexe). Ceci garantit déjà que $N_0$ est abélien. On remarque de plus que si $U$ est de dimension $< n$, la fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ donnée par la distance

(euclidienne) au sous-espace invariant $U$ fournit une fonction invariante par $N_0$ et sans maximum local. Dans le cas où $N$ est cristallographique, $N_0$ l'est aussi, et donc, le fait que $U = \mathbf{R}^n$ (i.e. $N_0$ est un groupe de translations pures) est assuré par la compacité de la variété $M = \mathbf{R}^n/N_0$. Pour finir, toujours dans ce cas, le même raisonnement appliqué à la fonction distance au sous-espace vectoriel $V$ engendré par les vecteurs de translation de $N_0$ montre que $V = \mathbf{R}^n$. □

1.3. Démonstration du théorème. Elle se réduit essentiellement au lemme suivant qui tient à l'existence des dilatations que sont les homothéties en géométrie affine:

1.3.1. Lemme. *Si $\Gamma$ est un sous-groupe discret de $Aff(\mathbf{R}^n)$, tout sous-groupe de type fini de $\Gamma_{nd}$ est nilpotent.*

*Démonstration.* Fixons pour commencer un domaine de contraction des commutateurs $D$ du groupe de Lie $G = Aff(\mathbf{R}^n)$ (cf. 1.1.2). Pour qu'un élément $Ax + b$ de $Aff(\mathbf{R}^n)$ soit dans $D$, il suffit d'avoir $A \in D_1 \subset GL(\mathbf{R}^n)$ et $b \in D_2 \subset \mathbf{R}^n$ où $D_1$ et $D_2$ sont respectivement des voisinages de l'identité et de zéro, choisis suffisamment petits et à leur tour fixés pour la suite.

Le groupe $L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^{\circ}$, par sa définition même, admet des systèmes générateurs aussi proches de l'identité que l'on veut. Ainsi, on est assuré que tout sous-groupe de type fini de $\Gamma_{nd}$ est inclus dans un sous-groupe dont les générateurs $A_1x + b_1, ..., A_sx + b_s$ ont leurs parties linéaires $A_i$, $i = 1, ..., s$ dans $D_1$.

Il suffit donc de prouver qu'un tel groupe est forcément nilpotent. Pour ceci, écrivons son conjugué par l'homothétie de rapport $\lambda$:

$$< A_1x + \lambda b_1, ..., A_sx + \lambda b_s > \subset \lambda \Gamma_{nd} \lambda^{-1}$$

et choisissons $\lambda$ assez petit de façon que $\lambda b_i \in D_2$ pour $i = 1, ..., s$. Ce groupe, continûment isomorphe au précédent, est lui aussi discret et de plus possède un système générateur dans le domaine de contraction des commutateurs $D$ fixé au début de la preuve. D'après le lemme 1.1.3, il est nilpotent. □

On conclut que $\Gamma_{nd}$ est nilpotent grâce au petit lemme suivant:

1.3.2. Lemme. *Un sous-groupe discret $G$ de $GL(\mathbf{C}^m)$ localement nilpotent (i.e. tous les sous-groupes de type fini de $G$ sont nilpotents) est nilpotent.*

*Démonstration.* D'après ([KM], exercice 21.1.6), un groupe de matrices localement résoluble est résoluble (cf. aussi [Ra], § 8). Le groupe $G$ est donc résoluble. Grâce au théorème 2.1.4, énoncé au § suivant, $G$ étant discret dans un groupe de Lie, il est polycyclique (i.e. tous ses sous-groupes sont de type fini). Par conséquent, $G$ est de type fini, il est donc nilpotent. □

Remarquons que le lemme 1.2.3 permet d'affirmer alors que $\Gamma_{nd}$ est abélien dans le cas classique (i.e. $\Gamma \subset E(n)$). Pour terminer la preuve de 1.2.1 dans le cas général, il reste à montrer l'unipotence de $\Gamma_{nd}$ lorsque $\Gamma$ est un groupe cristallographique (i.e. $\mathbf{R}^n/\Gamma$ est une variété compacte). Dans ce cas, on considère le sous-espace affine maximal $U$ sur lequel l'action de $\Gamma_{nd}$ est unipotente (cf. 1.2.2). Cet espace est invariant par $\Gamma$. On considère alors la variété $U/\Gamma$ qui a même type d'homotopie que la $n$-variété compacte $\mathbf{R}^n/\Gamma$. Ceci force $U$ à être de dimension $n$ et donc $\Gamma_{nd}$ à être unipotent (argument cohomologique de [FGH] p. 496 que l'on retrouvera en 3.3.1). □

## 2. Dans d'autres groupes de Lie

L'objet de ce § est de décrire une autre approche moins élémentaire du premier théorème de Bieberbach mettant en jeu les notions de moyennabilité et de croissance qui lui sont aujourd'hui indissociablement liées. L'idée de départ maintenant est de considérer $E(n)$ comme faisant partie de la classe $\mathscr{P}$ des groupes de Lie à croissance polynomiale, elle-même incluse dans celle $\mathscr{M}$ des moyennables. Le résultat s'énonce simplement de la façon suivante (2.1.4, 2.2.3): si $\Gamma$ est un sous-groupe discret dans un groupe de Lie $G \in \mathscr{M}$ (resp. $G \in \mathscr{P}$) alors $\Gamma$ est virtuellement polycyclique (resp. virtuellement nilpotent de type fini). Par ailleurs, les classes $\mathscr{M}$ et $\mathscr{P}$ sont caractérisées ainsi (2.1.3, 2.2.4): $G \in \mathscr{M}$ (resp. $G \in \mathscr{P}$) équivaut à $G = K \ltimes R$ où $K$ est compact et $R$ est résoluble (resp. résoluble avec une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs). Ces énoncés vont nous être utiles au § 3. Nous verrons au § 4 comment ils peuvent encore être généralisés.

2.1. Moyennabilité et résolubilité. Soit $G$ un groupe topologique *localement compact* muni de sa $\sigma$-algèbre borélienne $\mathscr{B}$. Une *moyenne* sur l'espace mesurable $(G, \mathscr{B})$ est une mesure de probabilité, *nulle sur les négligeables* (pour une mesure de Haar de $G$) et seulement supposée *finiment additive.* On dit que le groupe $G$ est *moyennable* s'il admet une moyenne invariante à gauche. Il est facile de vérifier alors qu'elle peut être choisie biinvariante (cf. [Gre] p. 29). Par exemple, l'unique mesure de Haar d'un groupe compact $K$ qui soit de probabilité fournit une moyenne biinvariante

sur $K$ (dans ce cas, elle est en plus $\sigma$-additive). Le lecteur pourra prouver, à titre d'exercice, la proposition naturelle suivante (cf. [Gre] p. 30 ou [Z1] p. 61):

2.1.1. PROPOSITION. *Tout sous-groupe fermé $H$ d'un groupe localement compact moyennable $G$ est moyennable (pour la topologie induite par $G$ sur $H$).*

Si l'on ne précise pas de topologie pour un groupe $G$ et que l'on dit que $G$ est moyennable, cela sous-entend qu'il l'est en tant que groupe topologique discret. Un groupe qui est moyennable dans ce sens l'est forcément pour toute autre structure de groupe localement compact et, d'après la proposition précédente, tous ses sous-groupes sont moyennables.

Le groupe libre à deux générateurs $L(a, b)$ n'est pas moyennable, ce qui fait que le groupe $O(3)$ qui le contient n'est pas moyennable en tant que groupe discret bien qu'il le soit en tant que groupe de Lie puisque compact (voir ci-dessus). Ceci est l'origine du célèbre « paradoxe » de Hausdorff-Banach-Tarski (cf. [Gre] ou [HS]).

Un groupe virtuellement résoluble est moyennable (même références). Dans [D], Day a posé la question suivante (parfois appelée improprement « conjecture de von Neumann »): y a-t-il équivalence entre la moyennabilité et la non-existence de sous-groupes libres à deux générateurs ? La réponse est non dans le cas général d'après Ol'shanski [O]. Cependant, le théorème suivant donne une réponse positive dans le cas particulier des sous-groupes du groupe linéaire. Le lecteur trouvera un excellent exposé introductif de ce résultat dans [H]:

2.1.2. THÉORÈME (Tits [T]). *Soit $G$ un sous-groupe de $GL(\mathbf{C}^n)$. Il est équivalent de dire que:*

(i) *$G$ est moyennable.*

(ii) *$G$ est virtuellement résoluble.*

(iii) *$G$ ne contient aucun groupe libre à deux générateurs.*

Nous avons vu que les groupes de Lie résolubles et les compacts sont moyennables (en tant que groupes de Lie). En fait, ces deux classes de groupes de Lie suffisent à construire tous les moyennables (cf. [Z1], p. 62):

2.1.3. THÉORÈME (Furstenberg [Fu]). *Les groupes de Lie moyennables sont exactement les produits semi-directs de la forme $K \ltimes R$ avec $K$ compact et $R$ résoluble.*

Venons-en aux sous-groupes discrets des groupes de Lie. Rappelons qu'un groupe est *polycyclique* s'il peut être obtenu à partir d'un nombre fini

d'extensions de groupes cycliques (finis ou infinis). On peut montrer (cf. [Ra]) qu'un groupe $G$ est polycyclique $\Leftrightarrow$ $G$ est résoluble et a tous ses sous-groupes de type fini.

2.1.4. THÉORÈME. *Soit* $\Gamma$ *un sous-groupe discret d'un groupe de Lie* $G$.

(i) $\Gamma$ *résoluble* $\Leftrightarrow \Gamma$ *polycyclique.*

(ii) *Si* $G$ *est un groupe de Lie moyennable alors* $\Gamma$ *est virtuellement polycyclique.*

*Démonstration.* (i) Voir [Ra], proposition 3.8.

(ii) $\Gamma$ est fermé dans $G$ groupe de Lie moyennable, donc $\Gamma$ est moyennable en tant que groupe discret d'après 2.1.1. On applique alors 2.1.2. $\square$

Le point (ii) suffirait à montrer qu'un sous-groupe discret de $E(n)$ est virtuellement polycyclique puisque $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ est un groupe de Lie moyennable (cf. 2.1.3). Signalons pour finir que d'après [M3], tout groupe polycyclique $\Gamma$ peut être réalisé comme sous-groupe discret de $Aff(\mathbf{R}^n)$ pour un $n$ assez grand et même de façon à ce que $\mathbf{R}^n/\Gamma$ soit une variété.

2.2. CROISSANCE POLYNOMIALE ET NILPOTENCE. Si la notion de moyennabilité a un sens pour n'importe quel groupe topologique, celle de croissance concerne uniquement les groupes topologiques de *type compact*, c'est-à-dire ceux qui possèdent un système générateur compact. Il s'agit là d'une simple extension de la classe des groupes de type fini où, en présence d'une structure topologique, les ensembles finis ont été remplacés par les compacts. Tout groupe de Lie est de type compact.

Définissons maintenant la notion de croissance pour un groupe topologique de type compact $G$. Soit $\Sigma$ un système générateur de $G$ compact et symétrique. On définit sur $G$ la distance invariante à gauche $d(x, y)$ = le nombre d'éléments minimum de $\Sigma$ permettant d'écrire $x^{-1}y$. Soit $\mu$ une mesure de Haar (unique à constante multiplicative près) et $B(e, L)$ la boule de centre $e$ et de rayon $L$ pour la métrique $d$. Le type de croissance de la fonction $f(L) = \mu(B(e, L))$ ne dépend pas du choix du système générateur $\Sigma$ choisi: c'est le type de croissance de $G$.

La notion de croissance a été introduite pour les groupes discrets de type fini en vue de l'étude du groupe fondamental de certaines variétés riemanniennes. L'observation initiale était la suivante: si $M$ est une variété riemannienne compacte, le type de croissance de $\pi_1(M)$ est le même que celui, contrôlable par l'analyse, du volume des boules du revêtement

universel riemannien $\tilde{M}$ (cf. [M1], [W2]). Dès le début s'est posée la question de l'équivalence entre croissance polynomiale et virtuelle nilpotence. Les premières étapes en vue de la réponse affirmative donnée par Gromov (cf. 4.3) sont les suivantes:

2.2.1. THÉORÈME. *Un groupe de type fini* $\Gamma$ *à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent dans les cas suivants:*

(i) $\Gamma$ *est virtuellement résoluble* (Milnor-Wolf [M2], [W2]).

(ii) $\Gamma$ *est un sous-groupe d'un groupe de Lie* (Tits [T]).

Il est facile de voir, grâce à la condition de Følner ([Fø] cf. [Gre]), qu'un groupe topologique à croissance polynomiale est forcément moyennable. Par ailleurs, on a la proposition suivante provenant directement des définitions:

2.2.2. PROPOSITION. *Tout sous-groupe discret de type fini d'un groupe topologique à croissance polynomiale est à croissance polynomiale.*

En groupant ceci avec ce qui précède, on obtient la généralisation suivante de Bieberbach:

2.2.3. THÉORÈME. *Un sous-groupe discret d'un groupe de Lie à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent de type fini.*

Le groupe $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ étant à croissance polynomiale, on retrouve ainsi l'énoncé classique de Bieberbach en appliquant ce résultat et le petit lemme 1.2.3. Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont classifiés par le:

2.2.4. THÉORÈME (Guivarc'h [Gui] ou Jenkins [J]). *Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont exactement les produits semi-directs de la forme* $K \ltimes R$ *avec* $K$ *compact et* $R$ *un groupe de Lie résoluble ayant une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs.*

Par exemple, un groupe de Lie linéaire *orthopotent* (cf. [Fr1]) c'est-à-dire un groupe de matrices triangulaires par blocs avec des blocs diagonaux dans le groupe orthogonal est à croissance polynomiale.

## 3. LE THÉORÈME DE BIEBERBACH LORENTZIEN

Le théorème de Bieberbach classique est énoncé pour des sous-groupes cristallographiques de $O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$. Remplaçons maintenant $O(n)$

par $O(n-1, 1)$, le groupe des matrices préservant la forme de Lorentz $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, et considérons les sous-groupes cristallographiques de $E(n-1, 1) = O(n-1, 1) \ltimes \mathbf{R}^n$, le groupe des isométries lorentziennes. Une variété lorentzienne plate est une variété de la relativité restreinte c'est-à-dire telle que les changements de carte peuvent être pris dans $E(n-1, 1)$. Un résultat récent [C2], donnant l'équivalent de Hopf-Rinow pour les variétés lorentziennes plates compactes, nous assure que ces variétés sont le quotient de $\mathbf{R}^n$ par $\Gamma$, un sous-groupe cristallographique de $E(n-1, 1)$. Dans [GK], Goldman et Kamishima ont montré qu'un tel sous-groupe est virtuellement polycyclique (cf. 2.1.4), ceci leur permet d'affirmer grâce à des travaux antérieurs ([Au], [FG]) que les variétés obtenues sont des solvariétés. Par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Une variété lorentzienne plate compacte est à un revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau).*

Le but de ce § est d'exposer la preuve de Goldman et Kamishima un peu simplifiée grâce à 1.2.1. Avant de commencer, nous traiterons un exemple en dimension 3.

3.1. LA VARIÉTÉ AFFINE $\mathbf{T}_A^3$. On notera

$$u = (1, 0, 0)\,,\ v = (0, 1, 0)\,,\ w = (0, 0, 1) \text{ et } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } A \in SL(\mathbf{Z}^2)\,.$$

La matrice $A$ détermine un automorphisme de $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et permet de construire la variété affine compacte $\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2/(t, z) \sim (t+1, Az)$. Cette variété s'écrit encore $\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R}^3/\Gamma$, où $\Gamma$ est le sous-groupe engendré par les translations $\tau_u$, $\tau_v$ et par $\tau_w \circ \tilde{A}$. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs propres de $A$ calculées dans $\mathbf{C}$.

On vérifie que si $\lambda_1$ et $\lambda_2 \notin \mathbf{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = e^{2i\pi p/q}$ ($q=3, 4$ ou $6$). La matrice $A$ est alors semblable à une rotation d'ordre 3, 4 ou 6. La variété $\mathbf{T}_A^3$ est donc une variété riemannienne plate. De plus, le groupe $\Gamma$ possédant 3 translations linéairement indépendantes $\tau_u$, $\tau_v$ et $\tau_{qw}$, $\mathbf{T}_A^3$ est à un revêtement fini près un tore, ce qui est conforme au théorème de Bieberbach.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, $A$ s'écrit dans une certaine base entière $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{T}_A^3$ est alors soit un tore, soit le quotient du groupe de Heisenberg par un réseau (i.e. $\mathbf{T}_A^3$ est une nilvariété).

Enfin, si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réelles distinctes, on choisit une base de vecteurs propres dans laquelle $A$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 \end{pmatrix}$ qui préserve alors la forme de Lorentz $q'(X) = X_1X_2$, où $X_1$ et $X_2$ sont les coordonnées de $X$ dans cette base. Par conséquent, $\tilde{A}$ est une isométrie lorentzienne de $\mathbf{R}^3$ (pour la forme de Lorentz $X_1X_2 + t^2$), la variété $\mathbf{T}^3_A$ est donc une variété lorentzienne plate; la partie linéaire de $\Gamma$ étant abélienne, $\Gamma$ est résoluble. On constate de plus que pour $\lambda_1 > 0$, la variété de départ $\mathbf{T}^3_A$ s'écrit $G/\Gamma_A$ où $G$ désigne un groupe de Lie difféomorphe à $\mathbf{R}^3$ dont la loi est définie par:

$$(t, x, y)(t', x', y') = \big(t+t', (x, y)+A^t(x', y')\big)$$

et où $\Gamma_A$ est le sous-groupe de $G$ constitué des éléments à coordonnées entières. Remarquons que $G$ s'identifie à $E(1, 1)$, il ne dépend donc pas de $A$. Le groupe $\Gamma_A$ étant un réseau et $G$ étant un groupe de Lie résoluble, $\mathbf{T}^3_A$ est une solvariété.

D'après [FG], il s'avère que toutes les variétés affines complètes compactes de dimension 3 sont en fait topologiquement équivalentes aux exemples que nous venons de traiter.

3.2. Le groupe de Lorentz $O(n-1, 1)$. Rappelons en quoi la géométrie hyperbolique est liée à la géométrie lorentzienne. Dans $\mathbf{R}^n$, muni de la forme de Lorentz $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, on considère $\mathbf{H}^{n-1}$, la nappe supérieure de l'hyperboloïde $q^{-1}(-1)$. La restriction de $q$ aux espaces tangents de $\mathbf{H}^{n-1}$ lui donne une structure de variété riemannienne à courbure constante égale à $-1$ (i.e. de variété hyperbolique). La projection stéréographique de $\mathbf{H}^{n-1}$ sur l'hyperplan $x_n = 0$ par rapport au point $(0, \dots, 0, -1)$ permet de visualiser $\mathbf{H}^{n-1}$ comme le disque de Poincaré $\mathbf{D}^{n-1}$, muni de la métrique transportée. Le groupe $O(n-1, 1)$ agit sur les directions du cône de lumière $q^{-1}(0)$ identifiées par la projection stéréographique à $\mathbf{S}^{n-2} = \partial\mathbf{D}^{n-1}$, la sphère à l'infini.

3.2.1. Propriétés. a) *Le groupe* $O(n-1, 1)$ *agit sur* $\mathbf{S}^{n-2}$ *par transformations conformes.*

b) *La projection stéréographique de* $\mathbf{S}^{n-2}$ *sur* $\mathbf{R}^{n-2}$ *est elle aussi conforme.*

Au cours de la preuve, nous utiliserons le lemme suivant sur la nature des sous-groupes unipotents de $O(n-1, 1)$:

3.2.2. LEMME. *Soit $G$ un sous-groupe unipotent non trivial de $O(n-1, 1)$, son normalisateur $N(G)$ est inclus dans un groupe de Lie moyennable.*

*Démonstration.* Soit $W$ le plus grand espace de vecteurs fixes sous l'action de $G$, par hypothèse $\dim W \geqslant 1$. Si $q|_W$ était non dégénérée, l'action unipotente de $G$ sur $W^\perp$ fournirait un espace vectoriel non trivial fixe par $G$; le sous-espace $W$ ne serait donc pas maximal. Ainsi, $q|_W$ est dégénérée et en fait $\dim \ker(q|_W) = 1$. On vérifie que $N(G)$ laisse $\ker(q|_W)$ invariant, c'est-à-dire fixe une direction du cône de lumière correspondant à un point de $\mathbf{S}^{n-2}$. Par projection stéréographique sur $\mathbf{R}^{n-2}$ de $\mathbf{S}^{n-2}$ privée de ce point, on obtient d'après 3.2.1 que $N(G)$ est inclus dans le groupe des transformations conformes de $\mathbf{R}^{n-2}$, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}^*O(n-2) \ltimes \mathbf{R}^{n-2}$, qui est un groupe de Lie moyennable (cf. § 2). □

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. D'après [C2], une variété lorentzienne plate compacte $M$ est le quotient de $\mathbf{R}^n$ par un sous-groupe cristallographique $\Gamma$ de $E(n-1, 1)$. Le théorème se réduit à démontrer que $\Gamma$ est virtuellement polycyclique. En effet, d'après ([FG], corollary 1.5), il existe alors un groupe de Lie résoluble $G \subset E(n-1, 1)$ agissant librement et transitivement sur $\mathbf{R}^n$, tel que $\Gamma_0 = \Gamma \cap G$ est d'indice fini dans $\Gamma$. Ceci assure que $M$ a un revêtement fini difféomorphe à $G/\Gamma_0$.

3.3.0. *Remarque.* Pour démontrer que $\Gamma$ est virtuellement polycyclique, puisque $\Gamma$ est discret, il suffit d'après 2.1.4 de montrer que $\Gamma$ ou même $L(\Gamma)$ est virtuellement résoluble ou encore que $L(\Gamma)$ et donc $\Gamma$ est dans un groupe de Lie moyennable.

a) *Cas où $L(\Gamma)$ est discret.*

Soit $V$ le sous-espace vectoriel engendré par les translations de $\Gamma$. On vérifie que $V$ est laissé stable par $L(\Gamma)$. Le lemme suivant assure que $V$ n'est pas trivial:

3.3.1. LEMME. *Si $L(\Gamma)$ est discret, $L|_\Gamma$ n'est pas injective.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Gamma$ soit isomorphe à $L(\Gamma)$. Le groupe $\Gamma$ est sans torsion, en effet l'existence d'un élément $\gamma \neq id$ d'ordre fini fournirait une orbite finie dont le barycentre serait fixe par $\gamma$ ce qui contredirait l'action libre de $\Gamma$. Par conséquent, $L(\Gamma)$ est un groupe discret sans torsion, ceci permet de construire la $(n-1)$-variété $L(\Gamma)\backslash\mathbf{H}^{n-1}$ qui est, comme $\mathbf{R}^n/\Gamma$, un espace d'Eilenberg-

Mac Lane associé à $\Gamma$. Ces deux variétés devraient donc avoir même cohomologie ce qui n'est pas le cas puisque la seconde est compacte de dimension $n$. La compacité de $\mathbf{R}^n/\Gamma$ intervient ici de façon essentielle (comparer avec [Ma] cf. 4.1). $\square$

Nous traiterons deux cas selon la dégénérescence de la restriction de $q$ à $V$:

- $q|_V$ *est dégénérée.*

Dans ce cas, $\ker(q|_V)$ est une direction du cône de lumière laissée stable par $L(\Gamma)$. On conclut comme en 3.2.2 que $L(\Gamma)$ est dans le groupe de Lie moyennable $\mathbf{R}^*O(n-1, 1) \ltimes \mathbf{R}^{n-2}$, ce qui est suffisant d'après 3.3.0.

- $q|_V$ *est non dégénérée.*

Comme $L(\Gamma)$ préserve $V$, il préserve donc aussi $V^\perp$, ainsi $L(\Gamma) \subset O(V) \times O(V^\perp)$ où $O(V)$ (resp. $O(V^\perp)$) est le groupe orthogonal de $q|_V$ (resp. $q|_{V^\perp}$). Il suit que $\Gamma \subset E(V) \times E(V^\perp)$ où $E(V)$ (resp. $E(V^\perp)$) est le groupe engendré par $O(V)$ (resp. $O(V^\perp)$) et par les translations de $V$ (resp. $V^\perp$). Considérons la projection $E(V) \times E(V^\perp) \xrightarrow{p} E(V^\perp)$. Par construction, $V$ est engendré par le groupe $\Gamma_0 = \ker(L|_\Gamma)$ des translations de $\Gamma$ qui agit trivialement sur $V^\perp$. Par conséquent, $\Gamma_0$ est un sous-groupe normal de $\ker(p|_\Gamma) = \Gamma_1$.

3.3.2. LEMME. *Le groupe* $\Gamma_1/\Gamma_0$ *est fini.*

*Démonstration.* Notons $k$ la dimension de $V$. Le quotient de $V$ par le groupe de translations $\Gamma_0 \simeq \mathbf{Z}^k$ est un tore $\mathbf{T}^k$. Par sa définition même, $\Gamma_1$ n'agit que sur le facteur $V$ pour donner une variété de dimension $k$ qui est aussi le quotient de $\mathbf{T}^k$ par le groupe $\Gamma_1/\Gamma_0$. $\square$

Il est facile de constater que ceci implique que $\Gamma$ est virtuellement polycyclique si et seulement si $p(\Gamma)$ l'est. Pour conclure la preuve du théorème dans le cas a), il reste donc à montrer le

3.3.3. LEMME. *Le groupe* $p(\Gamma)$ *est virtuellement polycyclique.*

*Démonstration.* Comme l'action de $\Gamma$ sur le produit $\mathbf{T}^k \times V^\perp$ est proprement discontinue (parce que donnant une variété au quotient) et que le premier facteur est compact, il est clair que l'action sur le deuxième facteur est à son tour proprement discontinue. Or cette action s'identifie à celle de $p(\Gamma)$ sur $V^\perp$. On vérifie par ailleurs que le quotient $V^\perp/p(\Gamma)$ est compact. Pour être sûr que ce quotient est une variété, il est connu qu'il suffit

de vérifier alors que $p(\Gamma)$ n'a pas de torsion. Mais d'après le lemme de Selberg [Al], $p(\Gamma)$ est virtuellement sans torsion, ce qui assure que $V^{\perp}/p(\Gamma)$ est à un revêtement fini près une variété compacte.

En restriction à $V^{\perp}$, $q$ est aussi non dégénérée. Si $q|_{V^{\perp}}$ est lorentzienne, ayant $\dim V^{\perp} < n$, on conclut que $p(\Gamma)$ est virtuellement polycyclique grâce au théorème de Bieberbach lorentzien en dimension $< n$ supposé déjà démontré (récurrence sur $n$). Si $q|_{V^{\perp}}$ est définie positive, on sait par le théorème de Bieberbach classique que $p(\Gamma)$ est virtuellement $\mathbf{Z}^{n-k}$. □

b) *Cas où* $L(\Gamma)$ *n'est pas discret.*

On a alors que $L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^{\circ}$ est non trivial et d'après 1.2.1, $L(\Gamma)_{nd}$ est unipotent. Comme $L(\Gamma)$ normalise $L(\Gamma)_{nd}$, on déduit de 3.2.2 que $L(\Gamma)$ est dans un groupe de Lie moyennable ce qui, d'après 3.3.0, est suffisant pour conclure. □

L'exemple $\mathbf{T}_A^3$ se généralise à toutes les dimensions. Il s'avère d'après Fried [Fr2] que les variétés lorentziennes plates compactes de dimension 4 sont à revêtement fini près des $\mathbf{T}_A^4$. Un résultat récent de Grunewald et Margulis [GM], généralisant celui de Fried, assure qu'en dimension $n$ ces variétés sont à revêtement fini près soit un $\mathbf{T}_A^n$ ($A \in SL(\mathbf{Z}^{n-1})$ et lorentzienne), soit une nilvariété de degré de nilpotence $\leqslant 3$.

## 4. Quelques autres généralisations

Nous allons pour finir passer en revue rapidement les autres généralisations que nous connaissons des résultats décrits dans ce qui précède.

4.1. Groupes affines cristallographiques. Rappelons que ce sont les sous-groupes discrets $\Gamma$ de $Aff(\mathbf{R}^n)$ dont le quotient $\mathbf{R}^n/\Gamma$ est une variété (ou même une « orbifold ») compacte. Le théorème 1.2.1 décrit en partie leur structure.

Conjecture d'Auslander (1964). *Un groupe affine cristallographique est virtuellement polycyclique.*

Tout le problème d'après 2.1.4 (i) est de montrer qu'un tel groupe est virtuellement résoluble. Auslander a publié une preuve dont il a reconnu ensuite qu'elle contenait une erreur irréparable. Aujourd'hui, on peut résumer les principaux cas où cette conjecture a été démontrée: en dimension $\leqslant 3$

(Fried-Goldman [FG]), dans le cas lorentzien (Goldman-Kamishima [GK] cf. § 3) et la généralisation par Grunewald-Margulis [GM] au cas où la partie linéaire $L(\Gamma)$ est dans un groupe algébrique $G$ de rang réel 1. Récemment, Tomanov [To] a traité le cas plus général où le rang réel semisimple de $G$ est 1. Il annonce dans cet article une modification de sa démonstration lui permettant d'obtenir la conjecture d'Auslander en dimensions 4 et 5. Notons aussi que cette conjecture se résout facilement dans le cas de la dimension complexe 2 (cf. [S] ou [FS]) et celui où $L(\Gamma)$ est orthopotent ([Fr1] cf. fin du § 2).

Si l'on s'intéresse à cette conjecture, il faut prendre garde à l'exemple surprenant trouvé par Margulis [Ma] d'un groupe libre à deux générateurs $\Gamma \subset E(2, 1)$ tel que le quotient $\mathbf{R}^3/\Gamma$ est une variété (non compacte).

4.2. Variétés presque plates. Il s'agit d'une autre généralisation du théorème de Bieberbach où l'on impose à une variété compacte $M$ d'avoir des métriques riemanniennes aussi plates que l'on veut. Plus précisément, Gromov donne la définition suivante: une variété compacte $M$ est *presque plate* s'il existe sur $M$ une suite $g_n$ de métriques riemanniennes pour laquelle le produit $K(g_n)d^2(M, g_n)$ de la courbure sectionelle par le carré du diamètre tend vers 0.

Théorème (Gromov [Gro1], [BK] ou [Ru]). *A revêtement fini près une variété presque plate $M$ est une nilvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un sous-groupe discret).*

En particulier, $\pi_1(M)$ est alors virtuellement nilpotent. On peut se demander s'il y a un énoncé analogue dans le cas lorentzien.

4.3. Caractérisation des groupes à croissance polynomiale. L'énoncé de Tits (cf. 2.2.1) pour les sous-groupes des groupes de Lie a été généralisé par Gromov aux cas de tous les groupes de type fini.

Théorème (Gromov [Gro2]). *Un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent.*

La démonstration de Gromov consiste après un délicat passage à la limite dans les espaces métriques pointés munis de la distance de Hausdorff à se ramener, via un résultat de Montgomery-Zippin à l'énoncé de Tits. Ce théorème de Gromov a été généralisé par Losert [L] aux groupes topologiques à génération compacte.

4.4. RELATIONS D'ÉQUIVALENCES MOYENNABLES ET CROISSANCE LOCALE. On peut chercher à généraliser les résultats du § 2 en considérant au lieu du cas discret comme dans 2.1.4 et 2.2.3 le cas opposé d'un sous-groupe dénombrable *dense* $\Gamma$ d'un groupe de Lie $G$. Les orbites de l'action de $\Gamma$ par translations à gauche sur $G$ définissent alors une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ *mesurable* (i.e. son graphe est mesurable) et *ergodique* (à cause de la densité de $\Gamma$). On peut définir la notion de relation d'équivalence mesurable $\mathcal{R}$ *moyennable*. Cette définition généralise la notion de moyennabilité d'un groupe (cf. [Z2] ou [CG] pour des définitions précises). Dans ce contexte, on a la généralisation suivante de 2.1.2 (cf. [CG] pour une démonstration en dimension 3):

4.4.1. THÉORÈME (Zimmer [Z2]). *Soit $\Gamma$ un sous-groupe dénombrable et dense d'un groupe de Lie $G$. La relation d'équivalence $\mathcal{R} = \Gamma\backslash G$ est moyennable si et seulement si $G$ est résoluble.*

Dans le même contexte et en supposant de plus que $\Gamma$ est de type fini, on peut donner une définition relative de croissance de $\Gamma$ à l'intérieur de $G$ appelée dans [C1] la *croissance locale de $\Gamma$ dans $G$*. On fixe un système générateur $\Sigma$ de $\Gamma$, une métrique sur $G$ et pour chaque $R > 0$ on compte le nombre de mots $f_R(L)$ écrits avec moins de $L$ lettres de $\Sigma$ et qui « vivent à tout moment de leur écriture » dans la boule de rayon $R$ de $G$ centrée en l'élément neutre. Le type de croissance locale (qui ne dépend ni du choix de $\Sigma$, ni du choix d'une métrique sur $G$) est la donnée des types de croissance des $f_R(L)$ en $L$, $\forall R > 0$. Le résultat suivant généralise 2.2.3:

4.4.2. THÉORÈME [C1]. *Soit $\Gamma$ de type fini et dense dans un groupe de Lie $G$. La croissance locale de $\Gamma$ dans $G$ est polynomiale si et seulement si $G$ est nilpotent.*

La preuve de ce résultat nécessite le théorème précédent ainsi qu'un usage intensif de la propriété de contraction des commutateurs 1.1.2. A ce titre, il s'agit bien d'une généralisation du théorème de Bieberbach. Il est d'ailleurs possible à partir de cet énoncé de montrer une version plus faible du théorème 1.2.1, à savoir la nilpotence de $L(\Gamma)_{nd}$.

## RÉFÉRENCES


[Al] ALPERIN, R. C. An elementary account of Selberg's lemma. *L'Enseignement Math. 33* (1987), 269-273.

[Au] AUSLANDER, L. On radicals of discrete subgroups of Lie groups. *Amer. J. Math. 85* (1963), 145-150.

[Bi] BIEBERBACH, L. Über die Bewegungsgruppen der Euklidische Räume I. *Math. Ann. 70* (1911), 297-336.

[Bo] BOREL, A. *Linear algebraic groups.* W. A. Benjamin, New York, 1969.

[Bu] BUSER, P. A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups. *L'Enseignement Mathématique 31* (1985), 137-145.

[BK] BUSER, P. and H. KARCHER. *Gromov's almost flat manifolds.* Astérisque 81, 1981.

[CG] CARRIÈRE, Y. et E. GHYS. Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie. *CRAS Paris 300* (1985), 677-680.

[C1] CARRIÈRE, Y. Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale. *Comment. Math. Helv. 63* (1988), 1-20.

[C2] —— Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines. *Inventiones Mathematicae 95* (1989), 615-628.

[D] DAY, M. Amenable semigroups, *Ill. J. Math. 1* (1957), 509-544.

[Fr1] FRIED, D. Distality, completeness and affine structures. *J. Diff. Geom. 24* (1986), 265-273.

[Fr2] —— Flat Spacetimes. *J. Diff. Geom. 26* (1987), 385-396.

[FG] FRIED, D. and W. GOLDMAN. Three-dimensional affine crystallographic groups. *Adv. in Math. 47* (1983), 1-49.

[FGH] FRIED, D., W. GOLDMAN and M. HIRSCH. Affine manifolds with nilpotent holonomy. *Comment. Math. Helv. 56* (1981), 487-523.

[FS] FILLMORE, J. P. and J. SCHEUNEMAN. Fundamental groups of compact complete locally affine complex surfaces. *Pacific J. Math. 44* (1973), 487-496.

[Fu] FURSTENBERG, H. A Poisson formula for semisimple Lie groups. *Annals of Math. 77* (1963), 335-383.

[Fø] FØLNER, E. On groups with full Banach mean value. *Math. Scand. 3* (1955), 243-254.

[GK] GOLDMAN, W. and Y. KAMISHIMA. The fondamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic. *J. Diff. Geom. 19* (1984), 233-240.

[GM] GRUNEWALD, F. and G. MARGULIS. Transitive and quasitransitive affine actions preserving a generalized Lorentz structure. Preprint Max Plank Institut, Bonn, à paraître, 1988.

[Gre] GREENLEAF, F. P. *Invariant means on topological groups.* Van Nostrand, 1965.

[Gro1] GROMOV, M. Almost flat manifolds. *J. Diff. Geom. 13* (1980), 231-242.

[Gro2] —— Groups of polynomial growth and expending maps. *Publ. IHES 53* (1981), 53-78.

[Gui] GUIVARC'H, Y. Croissance polynomiale des groupes et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France 101* (1973), 333-379.

[H] DE LA HARPE, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 129-144.

[HS] DE LA HARPE, P. et G. SKANDALIS. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. *L'Enseignement Math. 32* (1986), 121-138.

[J] JENKINS, J. W. Growth of connected locally compact groups. *J. Funct. Analysis 12* (1973), 113-127.

[KM] KARGAPOLOV, M. and I. MERZLIAKOV. *Fundamentals of the theory of groups* ou *Eléments de la théorie des groupes.* Graduate text in math 62, Springer Verlag ou Edition Mir, Moscou, 1979, 1985.

[L] LOSERT, V. On the structure of groups of polynomial growth. *Math. Z. 195* (1987), 109-117.

[Ma] MARGULIS, G. A. Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group. *J. Soviet Math. 36* (1987), 129-139.

[M1] MILNOR, J. A note on curvature and fundamental group. *J. Diff. Geom. 2* (1968), 1-7.

[M2] —— Growth of finitely generated solvable groups. *J. Diff. Geom. 2* (1968), 447-449.

[M3] —— On fundamental groups of complete affinely flat manifolds. *Adv. in Math. 25* (1977), 178-187.

[O] OL'SHANSKII, A. Y. On the question of existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys 35, 4* (1980), 180-181.

[Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete subgroups of Lie groups.* Ergebnisse der Mathematik 68, Springer, 1972.

[Ru] RUH, E. Almost flat manifolds. *J. Diff. Geom. 17* (1982), 1-14.

[S] SUWA, T. Compact quotient spaces of $\mathbf{C}^2$ by affine transformation groups. *J. Diff. Geom. 10* (1975), 239-252.

[Ti] TITS, J. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra 20* (1972), 250-270.

[To] TOMANOV, G. The fundamental group of a generalized Lorentz space form is virtually solvable. A paraître, 1989.

[W1] WOLF, J. *Spaces of constant curvature.* Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[W2] —— Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom. 2* (1968), 421-446.

[Z1] ZIMMER, R. J. *Ergodic theory and semisimple groups.* Birkhäuser, 1984.

[Z2] —— Amenable actions and dense subgroups of Lie groups. *J. Funct. Analysis 72* (1987), 58-64.

*(Reçu le 3 juillet 1989)*

Yves Carrière
Françoise Dal'bo

Institut Fourier
BP 74
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex
(France)