Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Autor: Carrière, Yves / Dal'bo, Françoise

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57376

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 245-262

GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

par Yves CARRIÈRE et Françoise DAL'BO

INTRODUCTION

On dira qu'un groupe a *virtuellement* la propriété P s'il contient un sous-groupe d'indice fini vérifiant P. Le premier théorème de Bieberbach [Bi] concerne la classification « virtuelle » des sous-groupes discrets du groupe d'isométries $E(n)$ de l'espace euclidien E^n.

THÉORÈME DE BIEBERBACH ([W1]). *Un sous-groupe discret* Γ *de* $E(n)$ *est virtuellement abélien. Si de plus,* Γ *est cristallographique (i.e. si* E^n/Γ *est compact), alors* Γ *est virtuellement constitué de translations.*

C'est en fait ce dernier cas qui était traité par Bieberbach. L'énoncé géométrique correspondant étant que toute variété riemannienne plate *compacte* est à revêtement fini près un tore plat (i.e. le quotient de E^n par un groupe $\mathbf{Z}^n$ de translations). Le cas général traité par Wolf permet, lui, d'affirmer qu'une variété riemannienne plate supposée seulement *complète* est à revêtement fini près topologiquement un cylindre.

Le but de ce texte est de fournir une introduction à ce que nous estimons être des généralisations plus ou moins lointaines de ce théorème. Dès le § 1, nous démontrons un théorème de Bieberbach (1.2.1) pour les sous-groupes discrets du groupe affine $Aff(\mathbf{R}^n)$ qui améliore un résultat provenant du travail d'Auslander [Au] utile dans l'étude des variétés affines complètes. La démonstration est, comme celle de Buser [Bu], inspirée par les variétés presque plates [Gro1] mais elle a l'avantage d'être un peu plus conceptuelle et de fournir, de ce fait, directement le cas général. Le § 2 est destiné à introduire les notions de moyennabilité et de croissance polynomiale ainsi que leur lien avec les propriétés algébriques de résolubilité et de nilpotence. Nous rappelons rapidement les travaux de Milnor [M1-2], Wolf [W2], Tits [T], etc., permettant d'analyser les propriétés algébriques des sous-groupes discrets des groupes de Lie moyennables et de retrouver ainsi le théorème de Bieberbach. Les § 1 et § 2 sont utilisés au § 3 pour

donner une preuve simplifiée d'un résultat de Goldman et Kamishima [GK] qui, joint à [C2] fournit le théorème de Bieberbach lorentzien: *une variété lorentzienne plate compacte est à revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau).* Un preprint récent de Grunewald et Margulis [GM] précise la nature des réseaux concernés prolongeant ainsi le travail de Fried [Fr2] en dimension 4. Le § 4 est un survol rapide de quelques autres généralisations.

Convention: Le terme « groupe de Lie » est pour nous synonyme de « groupe de Lie connexe ».

Nous tenons à remercier A. Haefliger et P. de la Harpe pour les critiques et les commentaires qu'ils ont ajoutés à ce texte.

1. Dans $Aff(\mathbf{R}^n)$

Nous allons donner une preuve et une généralisation du théorème de Bieberbach qui est élémentaire si le lecteur sait qu'un groupe linéaire nilpotent admet une décomposition de Jordan (cf. 1.2). L'idée naturelle de généralisation ici est de remplacer $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ par le groupe de toutes les transformations affines $Aff(\mathbf{R}^n) = GL(\mathbf{R}^n) \ltimes \mathbf{R}^n$. La perte de compacité du quotient dans le produit semi-direct se retrouve dans la conclusion plus faible (mais à notre avis optimale) du théorème obtenu (1.2.1).

1.1. Nilpotence et commutateurs dans un groupe de Lie. Soit Γ un groupe. *La suite centrale* $\Gamma^{(k)}$ *dérivée de* Γ est définie par $\Gamma^{(0)} = \Gamma$ et la relation de récurrence $\Gamma^{(k+1)} = [\Gamma, \Gamma^{(k)}]$ où le crochet désigne le *commutateur* des sous-groupes concernés de Γ. Le groupe Γ est *nilpotent* de degré d si la suite centrale dérivée $\Gamma^{(k)}$ devient triviale à partir de $k = d$. On a le lemme suivant résultant d'une récurrence sur d:

1.1.1. Lemme. *Pour que* Γ *soit nilpotent de degré* d, *il faut et il suffit que pour un système générateur* Σ *de* Γ *on ait*

$$[\gamma_0, [\gamma_1, [\cdots [\gamma_{d-1}, \gamma_d] \cdots] = e, \qquad \forall \gamma_0, \ldots, \gamma_d \in \Sigma .$$

Autrement dit, la nilpotence d'un groupe se lit sur l'un quelconque de ses systèmes générateurs. Considérons maintenant un groupe de Lie G. L'application commutateur: $(x, y) \in G \times G \mapsto [x, y] \in G$ a en l'élément neutre $(e, e) \in G \times G$ ses deux applications partielles $x \in G \mapsto [x, e]$ et $y \in G \mapsto [e, y]$ constantes égales à e. Par conséquent, le développement de Taylor de $[.,.]$ en (e, e) n'a que des termes où x, y interviennent simultanément. D'où la