2. Dans d'autres groupes de Lie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Démonstration. D'après ([KM], exercice 21.1.6), un groupe de matrices localement résoluble est résoluble (cf. aussi [Ra], § 8). Le groupe G est donc résoluble. Grâce au théorème 2.1.4, énoncé au § suivant, G étant discret dans un groupe de Lie, il est polycyclique (i.e. tous ses sous-groupes sont de type fini). Par conséquent, G est de type fini, il est donc nilpotent. □

Remarquons que le lemme 1.2.3 permet d'affirmer alors que Γ_{nd} est abélien dans le cas classique (i.e. $\Gamma \subset E(n)$). Pour terminer la preuve de 1.2.1 dans le cas général, il reste à montrer l'unipotence de Γ_{nd} lorsque Γ est un groupe cristallographique (i.e. $\mathbf{R}^n/\Gamma$ est une variété compacte). Dans ce cas, on considère le sous-espace affine maximal U sur lequel l'action de Γ_{nd} est unipotente (cf. 1.2.2). Cet espace est invariant par Γ. On considère alors la variété U/Γ qui a même type d'homotopie que la n-variété compacte $\mathbf{R}^n/\Gamma$. Ceci force U à être de dimension n et donc Γ_{nd} à être unipotent (argument cohomologique de [FGH] p. 496 que l'on retrouvera en 3.3.1). □

2. Dans d'autres groupes de Lie

L'objet de ce § est de décrire une autre approche moins élémentaire du premier théorème de Bieberbach mettant en jeu les notions de moyennabilité et de croissance qui lui sont aujourd'hui indissociablement liées. L'idée de départ maintenant est de considérer $E(n)$ comme faisant partie de la classe $\mathscr{P}$ des groupes de Lie à croissance polynomiale, elle-même incluse dans celle $\mathscr{M}$ des moyennables. Le résultat s'énonce simplement de la façon suivante (2.1.4, 2.2.3): si Γ est un sous-groupe discret dans un groupe de Lie $G \in \mathscr{M}$ (resp. $G \in \mathscr{P}$) alors Γ est virtuellement polycyclique (resp. virtuellement nilpotent de type fini). Par ailleurs, les classes $\mathscr{M}$ et $\mathscr{P}$ sont caractérisées ainsi (2.1.3, 2.2.4): $G \in \mathscr{M}$ (resp. $G \in \mathscr{P}$) équivaut à $G = K \ltimes R$ où K est compact et R est résoluble (resp. résoluble avec une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs). Ces énoncés vont nous être utiles au § 3. Nous verrons au § 4 comment ils peuvent encore être généralisés.

2.1. Moyennabilité et résolubilité. Soit G un groupe topologique *localement compact* muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathscr{B}$. Une *moyenne* sur l'espace mesurable $(G, \mathscr{B})$ est une mesure de probabilité, *nulle sur les négligeables* (pour une mesure de Haar de G) et seulement supposée *finiment additive.* On dit que le groupe G est *moyennable* s'il admet une moyenne invariante à gauche. Il est facile de vérifier alors qu'elle peut être choisie biinvariante (cf. [Gre] p. 29). Par exemple, l'unique mesure de Haar d'un groupe compact K qui soit de probabilité fournit une moyenne biinvariante

sur K (dans ce cas, elle est en plus σ-additive). Le lecteur pourra prouver, à titre d'exercice, la proposition naturelle suivante (cf. [Gre] p. 30 ou [Z1] p. 61):

2.1.1. PROPOSITION. *Tout sous-groupe fermé H d'un groupe localement compact moyennable G est moyennable (pour la topologie induite par G sur H).*

Si l'on ne précise pas de topologie pour un groupe G et que l'on dit que G est moyennable, cela sous-entend qu'il l'est en tant que groupe topologique discret. Un groupe qui est moyennable dans ce sens l'est forcément pour toute autre structure de groupe localement compact et, d'après la proposition précédente, tous ses sous-groupes sont moyennables.

Le groupe libre à deux générateurs $L(a, b)$ n'est pas moyennable, ce qui fait que le groupe $O(3)$ qui le contient n'est pas moyennable en tant que groupe discret bien qu'il le soit en tant que groupe de Lie puisque compact (voir ci-dessus). Ceci est l'origine du célèbre « paradoxe » de Hausdorff-Banach-Tarski (cf. [Gre] ou [HS]).

Un groupe virtuellement résoluble est moyennable (même références). Dans [D], Day a posé la question suivante (parfois appelée improprement « conjecture de von Neumann »): y a-t-il équivalence entre la moyennabilité et la non-existence de sous-groupes libres à deux générateurs ? La réponse est non dans le cas général d'après Ol'shanski [O]. Cependant, le théorème suivant donne une réponse positive dans le cas particulier des sous-groupes du groupe linéaire. Le lecteur trouvera un excellent exposé introductif de ce résultat dans [H]:

2.1.2. THÉORÈME (Tits [T]). *Soit G un sous-groupe de $GL(\mathbf{C}^n)$. Il est équivalent de dire que:*

(i) *G est moyennable.*

(ii) *G est virtuellement résoluble.*

(iii) *G ne contient aucun groupe libre à deux générateurs.*

Nous avons vu que les groupes de Lie résolubles et les compacts sont moyennables (en tant que groupes de Lie). En fait, ces deux classes de groupes de Lie suffisent à construire tous les moyennables (cf. [Z1], p. 62):

2.1.3. THÉORÈME (Furstenberg [Fu]). *Les groupes de Lie moyennables sont exactement les produits semi-directs de la forme $K \ltimes R$ avec K compact et R résoluble.*

Venons-en aux sous-groupes discrets des groupes de Lie. Rappelons qu'un groupe est *polycyclique* s'il peut être obtenu à partir d'un nombre fini

d'extensions de groupes cycliques (finis ou infinis). On peut montrer (cf. [Ra]) qu'un groupe G est polycyclique $\Leftrightarrow$ G est résoluble et a tous ses sous-groupes de type fini.

2.1.4. THÉORÈME. *Soit* Γ *un sous-groupe discret d'un groupe de Lie* G.

(i) Γ *résoluble* $\Leftrightarrow \Gamma$ *polycyclique.*

(ii) *Si* G *est un groupe de Lie moyennable alors* Γ *est virtuellement polycyclique.*

Démonstration. (i) Voir [Ra], proposition 3.8.

(ii) Γ est fermé dans G groupe de Lie moyennable, donc Γ est moyennable en tant que groupe discret d'après 2.1.1. On applique alors 2.1.2. $\square$

Le point (ii) suffirait à montrer qu'un sous-groupe discret de $E(n)$ est virtuellement polycyclique puisque $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ est un groupe de Lie moyennable (cf. 2.1.3). Signalons pour finir que d'après [M3], tout groupe polycyclique Γ peut être réalisé comme sous-groupe discret de $Aff(\mathbf{R}^n)$ pour un n assez grand et même de façon à ce que $\mathbf{R}^n/\Gamma$ soit une variété.

2.2. CROISSANCE POLYNOMIALE ET NILPOTENCE. Si la notion de moyennabilité a un sens pour n'importe quel groupe topologique, celle de croissance concerne uniquement les groupes topologiques de *type compact*, c'est-à-dire ceux qui possèdent un système générateur compact. Il s'agit là d'une simple extension de la classe des groupes de type fini où, en présence d'une structure topologique, les ensembles finis ont été remplacés par les compacts. Tout groupe de Lie est de type compact.

Définissons maintenant la notion de croissance pour un groupe topologique de type compact G. Soit Σ un système générateur de G compact et symétrique. On définit sur G la distance invariante à gauche $d(x, y)$ = le nombre d'éléments minimum de Σ permettant d'écrire $x^{-1}y$. Soit μ une mesure de Haar (unique à constante multiplicative près) et $B(e, L)$ la boule de centre e et de rayon L pour la métrique d. Le type de croissance de la fonction $f(L) = \mu(B(e, L))$ ne dépend pas du choix du système générateur Σ choisi: c'est le type de croissance de G.

La notion de croissance a été introduite pour les groupes discrets de type fini en vue de l'étude du groupe fondamental de certaines variétés riemanniennes. L'observation initiale était la suivante: si M est une variété riemannienne compacte, le type de croissance de $\pi_1(M)$ est le même que celui, contrôlable par l'analyse, du volume des boules du revêtement

universel riemannien $\tilde{M}$ (cf. [M1], [W2]). Dès le début s'est posée la question de l'équivalence entre croissance polynomiale et virtuelle nilpotence. Les premières étapes en vue de la réponse affirmative donnée par Gromov (cf. 4.3) sont les suivantes:

2.2.1. THÉORÈME. *Un groupe de type fini* Γ *à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent dans les cas suivants:*

(i) Γ *est virtuellement résoluble* (Milnor-Wolf [M2], [W2]).

(ii) Γ *est un sous-groupe d'un groupe de Lie* (Tits [T]).

Il est facile de voir, grâce à la condition de Følner ([Fø] cf. [Gre]), qu'un groupe topologique à croissance polynomiale est forcément moyennable. Par ailleurs, on a la proposition suivante provenant directement des définitions:

2.2.2. PROPOSITION. *Tout sous-groupe discret de type fini d'un groupe topologique à croissance polynomiale est à croissance polynomiale.*

En groupant ceci avec ce qui précède, on obtient la généralisation suivante de Bieberbach:

2.2.3. THÉORÈME. *Un sous-groupe discret d'un groupe de Lie à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent de type fini.*

Le groupe $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ étant à croissance polynomiale, on retrouve ainsi l'énoncé classique de Bieberbach en appliquant ce résultat et le petit lemme 1.2.3. Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont classifiés par le:

2.2.4. THÉORÈME (Guivarc'h [Gui] ou Jenkins [J]). *Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont exactement les produits semi-directs de la forme* $K \ltimes R$ *avec* K *compact et* R *un groupe de Lie résoluble ayant une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs.*

Par exemple, un groupe de Lie linéaire *orthopotent* (cf. [Fr1]) c'est-à-dire un groupe de matrices triangulaires par blocs avec des blocs diagonaux dans le groupe orthogonal est à croissance polynomiale.

3. LE THÉORÈME DE BIEBERBACH LORENTZIEN

Le théorème de Bieberbach classique est énoncé pour des sous-groupes cristallographiques de $O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$. Remplaçons maintenant $O(n)$