Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉNÉRALISATIONS DU PREMIER THÉORÈME DE BIEBERBACH SUR LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES

Autor: Carrière, Yves / Dal'bo, Françoise

Kapitel: 3. Le théorème de Bieberbach Lorentzien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57376

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

universel riemannien $\tilde{M}$ (cf. [M1], [W2]). Dès le début s'est posée la question de l'équivalence entre croissance polynomiale et virtuelle nilpotence. Les premières étapes en vue de la réponse affirmative donnée par Gromov (cf. 4.3) sont les suivantes:

2.2.1. THÉORÈME. *Un groupe de type fini* Γ *à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent dans les cas suivants:*

(i) Γ *est virtuellement résoluble* (Milnor-Wolf [M2], [W2]).

(ii) Γ *est un sous-groupe d'un groupe de Lie* (Tits [T]).

Il est facile de voir, grâce à la condition de Følner ([Fø] cf. [Gre]), qu'un groupe topologique à croissance polynomiale est forcément moyennable. Par ailleurs, on a la proposition suivante provenant directement des définitions:

2.2.2. PROPOSITION. *Tout sous-groupe discret de type fini d'un groupe topologique à croissance polynomiale est à croissance polynomiale.*

En groupant ceci avec ce qui précède, on obtient la généralisation suivante de Bieberbach:

2.2.3. THÉORÈME. *Un sous-groupe discret d'un groupe de Lie à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent de type fini.*

Le groupe $E(n) = O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ étant à croissance polynomiale, on retrouve ainsi l'énoncé classique de Bieberbach en appliquant ce résultat et le petit lemme 1.2.3. Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont classifiés par le:

2.2.4. THÉORÈME (Guivarc'h [Gui] ou Jenkins [J]). *Les groupes de Lie à croissance polynomiale sont exactement les produits semi-directs de la forme* $K \ltimes R$ *avec* K *compact et* R *un groupe de Lie résoluble ayant une algèbre de Lie triangulaire avec des éléments diagonaux imaginaires purs.*

Par exemple, un groupe de Lie linéaire *orthopotent* (cf. [Fr1]) c'est-à-dire un groupe de matrices triangulaires par blocs avec des blocs diagonaux dans le groupe orthogonal est à croissance polynomiale.

3. LE THÉORÈME DE BIEBERBACH LORENTZIEN

Le théorème de Bieberbach classique est énoncé pour des sous-groupes cristallographiques de $O(n) \ltimes \mathbf{R}^n$. Remplaçons maintenant $O(n)$

par $O(n-1, 1)$, le groupe des matrices préservant la forme de Lorentz $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, et considérons les sous-groupes cristallographiques de $E(n-1, 1) = O(n-1, 1) \ltimes \mathbf{R}^n$, le groupe des isométries lorentziennes. Une variété lorentzienne plate est une variété de la relativité restreinte c'est-à-dire telle que les changements de carte peuvent être pris dans $E(n-1, 1)$. Un résultat récent [C2], donnant l'équivalent de Hopf-Rinow pour les variétés lorentziennes plates compactes, nous assure que ces variétés sont le quotient de $\mathbf{R}^n$ par Γ, un sous-groupe cristallographique de $E(n-1, 1)$. Dans [GK], Goldman et Kamishima ont montré qu'un tel sous-groupe est virtuellement polycyclique (cf. 2.1.4), ceci leur permet d'affirmer grâce à des travaux antérieurs ([Au], [FG]) que les variétés obtenues sont des solvariétés. Par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Une variété lorentzienne plate compacte est à un revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un réseau).*

Le but de ce § est d'exposer la preuve de Goldman et Kamishima un peu simplifiée grâce à 1.2.1. Avant de commencer, nous traiterons un exemple en dimension 3.

3.1. LA VARIÉTÉ AFFINE $\mathbf{T}_A^3$. On notera

$$u = (1, 0, 0)\,,\ v = (0, 1, 0)\,,\ w = (0, 0, 1) \text{ et } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } A \in SL(\mathbf{Z}^2)\,.$$

La matrice A détermine un automorphisme de $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et permet de construire la variété affine compacte $\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2/(t, z) \sim (t+1, Az)$. Cette variété s'écrit encore $\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R}^3/\Gamma$, où Γ est le sous-groupe engendré par les translations τ_u, τ_v et par $\tau_w \circ \tilde{A}$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A calculées dans $\mathbf{C}$.

On vérifie que si λ_1 et $\lambda_2 \notin \mathbf{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = e^{2i\pi p/q}$ ($q=3, 4$ ou 6). La matrice A est alors semblable à une rotation d'ordre 3, 4 ou 6. La variété $\mathbf{T}_A^3$ est donc une variété riemannienne plate. De plus, le groupe Γ possédant 3 translations linéairement indépendantes τ_u, τ_v et τ_{qw}, $\mathbf{T}_A^3$ est à un revêtement fini près un tore, ce qui est conforme au théorème de Bieberbach.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, A s'écrit dans une certaine base entière $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{T}_A^3$ est alors soit un tore, soit le quotient du groupe de Heisenberg par un réseau (i.e. $\mathbf{T}_A^3$ est une nilvariété).

Enfin, si λ_1 et λ_2 sont réelles distinctes, on choisit une base de vecteurs propres dans laquelle A est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_1 \end{pmatrix}$ qui préserve alors la forme de Lorentz $q'(X) = X_1X_2$, où X_1 et X_2 sont les coordonnées de X dans cette base. Par conséquent, $\tilde{A}$ est une isométrie lorentzienne de $\mathbf{R}^3$ (pour la forme de Lorentz $X_1X_2 + t^2$), la variété $\mathbf{T}^3_A$ est donc une variété lorentzienne plate; la partie linéaire de Γ étant abélienne, Γ est résoluble. On constate de plus que pour $\lambda_1 > 0$, la variété de départ $\mathbf{T}^3_A$ s'écrit G/Γ_A où G désigne un groupe de Lie difféomorphe à $\mathbf{R}^3$ dont la loi est définie par:

$$(t, x, y)(t', x', y') = \big(t+t', (x, y)+A^t(x', y')\big)$$

et où Γ_A est le sous-groupe de G constitué des éléments à coordonnées entières. Remarquons que G s'identifie à $E(1, 1)$, il ne dépend donc pas de A. Le groupe Γ_A étant un réseau et G étant un groupe de Lie résoluble, $\mathbf{T}^3_A$ est une solvariété.

D'après [FG], il s'avère que toutes les variétés affines complètes compactes de dimension 3 sont en fait topologiquement équivalentes aux exemples que nous venons de traiter.

3.2. Le groupe de Lorentz $O(n-1, 1)$. Rappelons en quoi la géométrie hyperbolique est liée à la géométrie lorentzienne. Dans $\mathbf{R}^n$, muni de la forme de Lorentz $q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$, on considère $\mathbf{H}^{n-1}$, la nappe supérieure de l'hyperboloïde $q^{-1}(-1)$. La restriction de q aux espaces tangents de $\mathbf{H}^{n-1}$ lui donne une structure de variété riemannienne à courbure constante égale à -1 (i.e. de variété hyperbolique). La projection stéréographique de $\mathbf{H}^{n-1}$ sur l'hyperplan $x_n = 0$ par rapport au point $(0, \dots, 0, -1)$ permet de visualiser $\mathbf{H}^{n-1}$ comme le disque de Poincaré $\mathbf{D}^{n-1}$, muni de la métrique transportée. Le groupe $O(n-1, 1)$ agit sur les directions du cône de lumière $q^{-1}(0)$ identifiées par la projection stéréographique à $\mathbf{S}^{n-2} = \partial\mathbf{D}^{n-1}$, la sphère à l'infini.

3.2.1. Propriétés. a) *Le groupe* $O(n-1, 1)$ *agit sur* $\mathbf{S}^{n-2}$ *par transformations conformes.*

b) *La projection stéréographique de* $\mathbf{S}^{n-2}$ *sur* $\mathbf{R}^{n-2}$ *est elle aussi conforme.*

Au cours de la preuve, nous utiliserons le lemme suivant sur la nature des sous-groupes unipotents de $O(n-1, 1)$:

3.2.2. LEMME. *Soit G un sous-groupe unipotent non trivial de $O(n-1, 1)$, son normalisateur $N(G)$ est inclus dans un groupe de Lie moyennable.*

Démonstration. Soit W le plus grand espace de vecteurs fixes sous l'action de G, par hypothèse $\dim W \geqslant 1$. Si $q|_W$ était non dégénérée, l'action unipotente de G sur $W^\perp$ fournirait un espace vectoriel non trivial fixe par G; le sous-espace W ne serait donc pas maximal. Ainsi, $q|_W$ est dégénérée et en fait $\dim \ker(q|_W) = 1$. On vérifie que $N(G)$ laisse $\ker(q|_W)$ invariant, c'est-à-dire fixe une direction du cône de lumière correspondant à un point de $\mathbf{S}^{n-2}$. Par projection stéréographique sur $\mathbf{R}^{n-2}$ de $\mathbf{S}^{n-2}$ privée de ce point, on obtient d'après 3.2.1 que $N(G)$ est inclus dans le groupe des transformations conformes de $\mathbf{R}^{n-2}$, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}^*O(n-2) \ltimes \mathbf{R}^{n-2}$, qui est un groupe de Lie moyennable (cf. § 2). □

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. D'après [C2], une variété lorentzienne plate compacte M est le quotient de $\mathbf{R}^n$ par un sous-groupe cristallographique Γ de $E(n-1, 1)$. Le théorème se réduit à démontrer que Γ est virtuellement polycyclique. En effet, d'après ([FG], corollary 1.5), il existe alors un groupe de Lie résoluble $G \subset E(n-1, 1)$ agissant librement et transitivement sur $\mathbf{R}^n$, tel que $\Gamma_0 = \Gamma \cap G$ est d'indice fini dans Γ. Ceci assure que M a un revêtement fini difféomorphe à G/Γ_0.

3.3.0. *Remarque.* Pour démontrer que Γ est virtuellement polycyclique, puisque Γ est discret, il suffit d'après 2.1.4 de montrer que Γ ou même $L(\Gamma)$ est virtuellement résoluble ou encore que $L(\Gamma)$ et donc Γ est dans un groupe de Lie moyennable.

a) *Cas où $L(\Gamma)$ est discret.*

Soit V le sous-espace vectoriel engendré par les translations de Γ. On vérifie que V est laissé stable par $L(\Gamma)$. Le lemme suivant assure que V n'est pas trivial:

3.3.1. LEMME. *Si $L(\Gamma)$ est discret, $L|_\Gamma$ n'est pas injective.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que Γ soit isomorphe à $L(\Gamma)$. Le groupe Γ est sans torsion, en effet l'existence d'un élément $\gamma \neq id$ d'ordre fini fournirait une orbite finie dont le barycentre serait fixe par γ ce qui contredirait l'action libre de Γ. Par conséquent, $L(\Gamma)$ est un groupe discret sans torsion, ceci permet de construire la $(n-1)$-variété $L(\Gamma)\backslash\mathbf{H}^{n-1}$ qui est, comme $\mathbf{R}^n/\Gamma$, un espace d'Eilenberg-

Mac Lane associé à Γ. Ces deux variétés devraient donc avoir même cohomologie ce qui n'est pas le cas puisque la seconde est compacte de dimension n. La compacité de $\mathbf{R}^n/\Gamma$ intervient ici de façon essentielle (comparer avec [Ma] cf. 4.1). $\square$

Nous traiterons deux cas selon la dégénérescence de la restriction de q à V:

- $q|_V$ *est dégénérée.*

Dans ce cas, $\ker(q|_V)$ est une direction du cône de lumière laissée stable par $L(\Gamma)$. On conclut comme en 3.2.2 que $L(\Gamma)$ est dans le groupe de Lie moyennable $\mathbf{R}^*O(n-1, 1) \ltimes \mathbf{R}^{n-2}$, ce qui est suffisant d'après 3.3.0.

- $q|_V$ *est non dégénérée.*

Comme $L(\Gamma)$ préserve V, il préserve donc aussi $V^\perp$, ainsi $L(\Gamma) \subset O(V) \times O(V^\perp)$ où $O(V)$ (resp. $O(V^\perp)$) est le groupe orthogonal de $q|_V$ (resp. $q|_{V^\perp}$). Il suit que $\Gamma \subset E(V) \times E(V^\perp)$ où $E(V)$ (resp. $E(V^\perp)$) est le groupe engendré par $O(V)$ (resp. $O(V^\perp)$) et par les translations de V (resp. $V^\perp$). Considérons la projection $E(V) \times E(V^\perp) \xrightarrow{p} E(V^\perp)$. Par construction, V est engendré par le groupe $\Gamma_0 = \ker(L|_\Gamma)$ des translations de Γ qui agit trivialement sur $V^\perp$. Par conséquent, Γ_0 est un sous-groupe normal de $\ker(p|_\Gamma) = \Gamma_1$.

3.3.2. LEMME. *Le groupe* Γ_1/Γ_0 *est fini.*

Démonstration. Notons k la dimension de V. Le quotient de V par le groupe de translations $\Gamma_0 \simeq \mathbf{Z}^k$ est un tore $\mathbf{T}^k$. Par sa définition même, Γ_1 n'agit que sur le facteur V pour donner une variété de dimension k qui est aussi le quotient de $\mathbf{T}^k$ par le groupe Γ_1/Γ_0. $\square$

Il est facile de constater que ceci implique que Γ est virtuellement polycyclique si et seulement si $p(\Gamma)$ l'est. Pour conclure la preuve du théorème dans le cas a), il reste donc à montrer le

3.3.3. LEMME. *Le groupe* $p(\Gamma)$ *est virtuellement polycyclique.*

Démonstration. Comme l'action de Γ sur le produit $\mathbf{T}^k \times V^\perp$ est proprement discontinue (parce que donnant une variété au quotient) et que le premier facteur est compact, il est clair que l'action sur le deuxième facteur est à son tour proprement discontinue. Or cette action s'identifie à celle de $p(\Gamma)$ sur $V^\perp$. On vérifie par ailleurs que le quotient $V^\perp/p(\Gamma)$ est compact. Pour être sûr que ce quotient est une variété, il est connu qu'il suffit

de vérifier alors que $p(\Gamma)$ n'a pas de torsion. Mais d'après le lemme de Selberg [Al], $p(\Gamma)$ est virtuellement sans torsion, ce qui assure que $V^{\perp}/p(\Gamma)$ est à un revêtement fini près une variété compacte.

En restriction à $V^{\perp}$, q est aussi non dégénérée. Si $q|_{V^{\perp}}$ est lorentzienne, ayant $\dim V^{\perp} < n$, on conclut que $p(\Gamma)$ est virtuellement polycyclique grâce au théorème de Bieberbach lorentzien en dimension $< n$ supposé déjà démontré (récurrence sur n). Si $q|_{V^{\perp}}$ est définie positive, on sait par le théorème de Bieberbach classique que $p(\Gamma)$ est virtuellement $\mathbf{Z}^{n-k}$. □

b) *Cas où* $L(\Gamma)$ *n'est pas discret.*

On a alors que $L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^{\circ}$ est non trivial et d'après 1.2.1, $L(\Gamma)_{nd}$ est unipotent. Comme $L(\Gamma)$ normalise $L(\Gamma)_{nd}$, on déduit de 3.2.2 que $L(\Gamma)$ est dans un groupe de Lie moyennable ce qui, d'après 3.3.0, est suffisant pour conclure. □

L'exemple $\mathbf{T}_A^3$ se généralise à toutes les dimensions. Il s'avère d'après Fried [Fr2] que les variétés lorentziennes plates compactes de dimension 4 sont à revêtement fini près des $\mathbf{T}_A^4$. Un résultat récent de Grunewald et Margulis [GM], généralisant celui de Fried, assure qu'en dimension n ces variétés sont à revêtement fini près soit un $\mathbf{T}_A^n$ ($A \in SL(\mathbf{Z}^{n-1})$ et lorentzienne), soit une nilvariété de degré de nilpotence $\leqslant 3$.

4. Quelques autres généralisations

Nous allons pour finir passer en revue rapidement les autres généralisations que nous connaissons des résultats décrits dans ce qui précède.

4.1. Groupes affines cristallographiques. Rappelons que ce sont les sous-groupes discrets Γ de $Aff(\mathbf{R}^n)$ dont le quotient $\mathbf{R}^n/\Gamma$ est une variété (ou même une « orbifold ») compacte. Le théorème 1.2.1 décrit en partie leur structure.

Conjecture d'Auslander (1964). *Un groupe affine cristallographique est virtuellement polycyclique.*

Tout le problème d'après 2.1.4 (i) est de montrer qu'un tel groupe est virtuellement résoluble. Auslander a publié une preuve dont il a reconnu ensuite qu'elle contenait une erreur irréparable. Aujourd'hui, on peut résumer les principaux cas où cette conjecture a été démontrée: en dimension $\leqslant 3$