4. Quelques autres généralisations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

de vérifier alors que $p(\Gamma)$ n'a pas de torsion. Mais d'après le lemme de Selberg [Al], $p(\Gamma)$ est virtuellement sans torsion, ce qui assure que $V^{\perp}/p(\Gamma)$ est à un revêtement fini près une variété compacte.

En restriction à $V^{\perp}$, q est aussi non dégénérée. Si $q|_{V^{\perp}}$ est lorentzienne, ayant $\dim V^{\perp} < n$, on conclut que $p(\Gamma)$ est virtuellement polycyclique grâce au théorème de Bieberbach lorentzien en dimension $< n$ supposé déjà démontré (récurrence sur n). Si $q|_{V^{\perp}}$ est définie positive, on sait par le théorème de Bieberbach classique que $p(\Gamma)$ est virtuellement $\mathbf{Z}^{n-k}$. □

b) *Cas où* $L(\Gamma)$ *n'est pas discret.*

On a alors que $L(\Gamma)_{nd} = L(\Gamma) \cap \overline{L(\Gamma)}^{\circ}$ est non trivial et d'après 1.2.1, $L(\Gamma)_{nd}$ est unipotent. Comme $L(\Gamma)$ normalise $L(\Gamma)_{nd}$, on déduit de 3.2.2 que $L(\Gamma)$ est dans un groupe de Lie moyennable ce qui, d'après 3.3.0, est suffisant pour conclure. □

L'exemple $\mathbf{T}_A^3$ se généralise à toutes les dimensions. Il s'avère d'après Fried [Fr2] que les variétés lorentziennes plates compactes de dimension 4 sont à revêtement fini près des $\mathbf{T}_A^4$. Un résultat récent de Grunewald et Margulis [GM], généralisant celui de Fried, assure qu'en dimension n ces variétés sont à revêtement fini près soit un $\mathbf{T}_A^n$ ($A \in SL(\mathbf{Z}^{n-1})$ et lorentzienne), soit une nilvariété de degré de nilpotence $\leqslant 3$.

4. Quelques autres généralisations

Nous allons pour finir passer en revue rapidement les autres généralisations que nous connaissons des résultats décrits dans ce qui précède.

4.1. Groupes affines cristallographiques. Rappelons que ce sont les sous-groupes discrets Γ de $Aff(\mathbf{R}^n)$ dont le quotient $\mathbf{R}^n/\Gamma$ est une variété (ou même une « orbifold ») compacte. Le théorème 1.2.1 décrit en partie leur structure.

Conjecture d'Auslander (1964). *Un groupe affine cristallographique est virtuellement polycyclique.*

Tout le problème d'après 2.1.4 (i) est de montrer qu'un tel groupe est virtuellement résoluble. Auslander a publié une preuve dont il a reconnu ensuite qu'elle contenait une erreur irréparable. Aujourd'hui, on peut résumer les principaux cas où cette conjecture a été démontrée: en dimension $\leqslant 3$

(Fried-Goldman [FG]), dans le cas lorentzien (Goldman-Kamishima [GK] cf. § 3) et la généralisation par Grunewald-Margulis [GM] au cas où la partie linéaire $L(\Gamma)$ est dans un groupe algébrique G de rang réel 1. Récemment, Tomanov [To] a traité le cas plus général où le rang réel semisimple de G est 1. Il annonce dans cet article une modification de sa démonstration lui permettant d'obtenir la conjecture d'Auslander en dimensions 4 et 5. Notons aussi que cette conjecture se résout facilement dans le cas de la dimension complexe 2 (cf. [S] ou [FS]) et celui où $L(\Gamma)$ est orthopotent ([Fr1] cf. fin du § 2).

Si l'on s'intéresse à cette conjecture, il faut prendre garde à l'exemple surprenant trouvé par Margulis [Ma] d'un groupe libre à deux générateurs $\Gamma \subset E(2, 1)$ tel que le quotient $\mathbf{R}^3/\Gamma$ est une variété (non compacte).

4.2. Variétés presque plates. Il s'agit d'une autre généralisation du théorème de Bieberbach où l'on impose à une variété compacte M d'avoir des métriques riemanniennes aussi plates que l'on veut. Plus précisément, Gromov donne la définition suivante: une variété compacte M est *presque plate* s'il existe sur M une suite g_n de métriques riemanniennes pour laquelle le produit $K(g_n)d^2(M, g_n)$ de la courbure sectionelle par le carré du diamètre tend vers 0.

Théorème (Gromov [Gro1], [BK] ou [Ru]). *A revêtement fini près une variété presque plate M est une nilvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un sous-groupe discret).*

En particulier, $\pi_1(M)$ est alors virtuellement nilpotent. On peut se demander s'il y a un énoncé analogue dans le cas lorentzien.

4.3. Caractérisation des groupes à croissance polynomiale. L'énoncé de Tits (cf. 2.2.1) pour les sous-groupes des groupes de Lie a été généralisé par Gromov aux cas de tous les groupes de type fini.

Théorème (Gromov [Gro2]). *Un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent.*

La démonstration de Gromov consiste après un délicat passage à la limite dans les espaces métriques pointés munis de la distance de Hausdorff à se ramener, via un résultat de Montgomery-Zippin à l'énoncé de Tits. Ce théorème de Gromov a été généralisé par Losert [L] aux groupes topologiques à génération compacte.

4.4. RELATIONS D'ÉQUIVALENCES MOYENNABLES ET CROISSANCE LOCALE. On peut chercher à généraliser les résultats du § 2 en considérant au lieu du cas discret comme dans 2.1.4 et 2.2.3 le cas opposé d'un sous-groupe dénombrable *dense* Γ d'un groupe de Lie G. Les orbites de l'action de Γ par translations à gauche sur G définissent alors une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ *mesurable* (i.e. son graphe est mesurable) et *ergodique* (à cause de la densité de Γ). On peut définir la notion de relation d'équivalence mesurable $\mathcal{R}$ *moyennable*. Cette définition généralise la notion de moyennabilité d'un groupe (cf. [Z2] ou [CG] pour des définitions précises). Dans ce contexte, on a la généralisation suivante de 2.1.2 (cf. [CG] pour une démonstration en dimension 3):

4.4.1. THÉORÈME (Zimmer [Z2]). *Soit Γ un sous-groupe dénombrable et dense d'un groupe de Lie G. La relation d'équivalence $\mathcal{R} = \Gamma\backslash G$ est moyennable si et seulement si G est résoluble.*

Dans le même contexte et en supposant de plus que Γ est de type fini, on peut donner une définition relative de croissance de Γ à l'intérieur de G appelée dans [C1] la *croissance locale de Γ dans G*. On fixe un système générateur Σ de Γ, une métrique sur G et pour chaque $R > 0$ on compte le nombre de mots $f_R(L)$ écrits avec moins de L lettres de Σ et qui « vivent à tout moment de leur écriture » dans la boule de rayon R de G centrée en l'élément neutre. Le type de croissance locale (qui ne dépend ni du choix de Σ, ni du choix d'une métrique sur G) est la donnée des types de croissance des $f_R(L)$ en L, $\forall R > 0$. Le résultat suivant généralise 2.2.3:

4.4.2. THÉORÈME [C1]. *Soit Γ de type fini et dense dans un groupe de Lie G. La croissance locale de Γ dans G est polynomiale si et seulement si G est nilpotent.*

La preuve de ce résultat nécessite le théorème précédent ainsi qu'un usage intensif de la propriété de contraction des commutateurs 1.1.2. A ce titre, il s'agit bien d'une généralisation du théorème de Bieberbach. Il est d'ailleurs possible à partir de cet énoncé de montrer une version plus faible du théorème 1.2.1, à savoir la nilpotence de $L(\Gamma)_{nd}$.