# Section 3. Proof of Theorem 5

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

$$\varphi\colon T_n(q) \to \mu_\infty\,,$$

$$c_\cdot^{(1)}\big(d_{p_1}(\varphi)\big) = c_\cdot^{(2)}\big(d_{p_2}(\varphi)\big)\,.$$

But

$$d_{p_i}(\varphi) = e_{p_i}^{-1} \circ \varphi$$

and

$$c_\cdot^{(i)}\big(d_{p_i}(\varphi)\big) = \varphi^* \circ (e_{p_i}^{-1})^*\big(e_{p_i}^*(u)\big) = \varphi^*(u)\,.$$

*Remark.* It is necessary to reduce to $\mathbf{Z}_{l^a}$ coefficients as the restriction map

$$H^*\big(Gl_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l\big) \to H^*\big(T_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l\big)$$

is not injective in general.

## Section 3. Proof of Theorem 5

CH1 and CH2 clearly follow from resp. CH1 and CH2 in Theorem 2 together with the functoriality of the decomposition map $d_p$ i.e. the diagram

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbf{C}}(G) & \overset{f^*}{\to} & R_{\mathbf{C}}(H) \\ \downarrow{\scriptstyle d_p} & & \downarrow{\scriptstyle d_p} \\ R_p(G) & \overset{f^*}{\to} & R_p(H) \end{array}$$

is commutative for a group homomorphism $f\colon H \to G$. To obtain CH3 note that $d_p(\varphi) = e_p^{-1} \circ \varphi$ so by definition

$$c_1(\varphi) = c_1\big(d_p(\varphi)\big) = (e_p^{-1} \circ \varphi)\,(e_p^* u) = \varphi^* \circ (e_p^{-1})^* \circ e_p^*(u) = \varphi^*(u)\,.$$

Furthermore let $\delta$ be the connecting homomorphism obtained from the exact sequence

$$\mathbf{Z} \rightarrowtail \mathbf{Q} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

As the diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mu_\infty, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \overset{\sim\delta}{\to} & H^2(\mu_\infty, \mathbf{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \overset{\sim\delta}{\to} & H^2(G, \mathbf{Z}) \end{array}$$

is commutative and as both $\delta$'s are isomorphisms it suffices to show that

$$\delta^{-1} \circ c_1 : \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*) \to H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

is an isomorphism.

But by inspection $\delta^{-1} \circ c_1(\varphi) = \delta^{-1}(u) \circ \varphi$, and as $u$ is a $\hat{\mathbf{Z}} = \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(\mu_\infty)$ generator for $H^2(\mu_\infty, \mathbf{Z}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$, $\delta^{-1}(u)$ is an isomorphism

$$\delta^{-1}(u) : \mu_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .$$

## Section 4. Chern classes for locally finite groups

The definition will be based on the following two observations. In the following, let $G = \varinjlim G_k$ be a locally finite group where $\{G_k\}$ is a family of finite subgroups.

Lemma. *Let*

$$\varphi : G \to Gl_n(\mathbf{C})$$

*be a representation of* $G$. *Then* $\varphi$ *is uniquely determined by its restrictions*

$$\varphi_k : G_k \to Gl_n(\mathbf{C}) .$$

*Conversely given a family of compatible representations* $\varphi_k : G_k \to Gl_n(\mathbf{C})$, *there exists a unique* $\varphi : G \to Gl_n(\mathbf{C})$ *which restricts to* $\varphi_k$ *for all* $k$.

*Proof.* From the universal property of the direct limit, we have

$$\mathrm{Hom}(G, Gl_n(\mathbf{C})) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}(G_k, Gl_n(\mathbf{C})) .$$

Proposition. *For all* $i \geqslant 0$, *the natural map*

$$H^i(G, \mathbf{Z}) \cong \varprojlim H^i(G_k, \mathbf{Z}) .$$

*is an isomorphism.*

*Proof.* Obvious for $i = 0, 1$. For $i \geqslant 1$, the homology groups

$$H_i(G, \mathbf{Z}) = \varinjlim H_i(G_k, \mathbf{Z})$$

are all abelian torsion groups.

Now by the universal coefficient theorem ($i \geqslant 1$)