Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 41-49

THE CANTOR SET AND A GEOMETRIC CONSTRUCTION

by Marco PAVONE

INTRODUCTION

The Cantor ternary set consists of all those real numbers x in $[0, 1]$ which have a ternary expansion $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ for which a_n is never 1. Equivalently, C can be obtained in a purely geometrical fashion by first removing from $[0, 1]$ the middle third $(1/3, 2/3)$, then removing the middle thirds $(1/9, 2/9)$ and $(7/9, 8/9)$ of the remaining intervals, and so on (C will be exactly the complement of the countable union of the removed intervals). If $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ is in C, the geometric interpretation of its ternary expansion is that x is the unique point in $[0, 1]$ which is reached by first staying to the left or to the right of $(1/3, 2/3)$ if $a_1 = 0$ or $a_1 = 2$ respectively, then staying to the left or to the right of the next removed interval if $a_2 = 0$ or $a_2 = 2$ respectively, and so on. It follows from the construction that C is a nowhere dense closed subset of $[0, 1]$.

A well known property of C is that any real number in $[0, 2]$ can be written as the sum of two numbers in C. The purpose of this note is to give an elementary proof of $C + C = [0, 2]$ which only uses the geometric definition of C. A refinement of the proof shows in fact that for any k in $[0, 2]$ there exists either a finite or an uncountable number of pairs x, y from C such that $x + y = k$. We also discuss the analogy between this decomposition result and certain properties of continued fractions.

THE GEOMETRIC CONSTRUCTION

We set, as usual, $C \times C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in C\}$. Then $C + C = [0, 2]$ can be geometrically restated as

(*) for any k in $[0, 2]$ the line $x + y = k$ intersects $C \times C$ in at least one point.