LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

Autor(en): **Dherte, Hélène**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-57369

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 117-124

LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène DHERTE

§ 0. INTRODUCTION

Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux à unité. On note $\mathrm{End}_N(M)$ l'anneau des endomorphismes de M vu comme N-module à droite. Pour tout $x \in M$, la multiplication à gauche $\lambda(x)$ par x dans M appartient à $\mathrm{End}_N(M)$; on identifie ci-dessous M à son image par $\lambda: M \to \mathrm{End}_N(M)$.

Cette *construction fondamentale* fournit ainsi une paire $1 \in M \subseteq \mathrm{End}_N(M)$ à partir de $1 \in N \subseteq M$. En itérant, on obtient une *tour*:

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque M et N sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type II_1, ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque M et N sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'*indice* de N dans M, qui est par définition

$$[M:N] = \limsup_{k \to \infty} \mathrm{rk}\,(M_k/M_0)^{1/k}$$

où $\mathrm{rk}\,(M_k/M_0)$ est le *rang* de M_k sur M_0, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de M_k comme M_0-module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où M est libre comme N-module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H]$$

où G est un groupe fini, $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ l'algèbre de G sur $\mathbf{K}$ et H un sous-groupe de G (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

§ 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie m et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit W un hyperplan de V tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

Preuve. Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de W (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de V et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur I et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} . ... . e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\} . \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier L à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de V, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\varnothing) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \varnothing$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non

dégénérée); tr ne dépend pas du choix de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et sa restriction à N est encore fidèle. On peut donc définir la projection orthogonale

$$E \begin{cases} M & \to & N \\ \sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J & \mapsto & \sum \lambda_I e_I \end{cases}$$

(sommes sur $I, J \subset \{1, ..., m-1\}$) relative à la forme $(x, x') \mapsto \operatorname{tr}(xx')$. On montre que E possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E(x)) &= \operatorname{tr}(x), \ \forall x \in M \\ E(y) &= y, \ \forall y \in N \\ E(xy) &= E(x)y, \ \forall x \in M, y \in N \\ E(yx) &= yE(x), \ \forall x \in M, y \in N \end{aligned}$$

(voir [GHJ] 2.6.2). En d'autres termes, E est une *espérance conditionnelle* de M sur N. On vérifie aussi qu'elle est *fidèle*: si $x \in M$ est tel que $E(xx') = 0$ pour tout $x' \in M$, alors $x = 0$. La troisième propriété ci-dessus montre que $E \in L$.

LEMME 2. *Avec les notations précédentes, on pose* $a = \langle e_m, e_m \rangle$ *et* $F = 2E - 1$. *Alors*

(i) $N^\perp = \lambda(e_m)(N)$,

(ii) $\lambda(e_m) F \lambda(e_m) = -aF$ *dans* L.

Preuve. (i) Si $x, y \in N$, on a $\operatorname{tr}(e_m xy) = 0$ et puisque $e_m x \in \lambda(e_m)N$, il vient $\lambda(e_m)N \subseteq N^\perp$.

Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons que comme $\dim N = 2^{m-1}$, $\dim M = 2^m$ et $M = N \oplus N^\perp$, on a $\dim N^\perp = 2^{m-1}$. De plus $\lambda(e_m): N \to N^\perp$ est bijective puisque $\lambda(e_m)^2 = a \cdot 1_M$. On en tire $N^\perp = \lambda(e_m)N$.

(ii) Soit $y \in N$. Alors $F\lambda(e_m)y = -\lambda(e_m)y$ puisque $F = 2E - 1$ et $N^\perp = \lambda(e_m)N = -\lambda(e_m)Fy$.

Soit $x \in N^\perp$, alors $F\lambda(e_m)x = \lambda(e_m)x = -\lambda(e_m)Fx$.

Donc $F\lambda(e_m) = -\lambda(e_m)F$ et on a le résultat annoncé en multipliant à gauche par $\lambda(e_m)$. $\square$

Notons $V \oplus -a$ l'espace vectoriel $V \oplus \mathbf{K}$ muni de la forme bilinéaire symétrique $((x, \lambda), (x', \lambda')) \mapsto \langle x, x' \rangle - a\lambda\lambda'$.

THÉORÈME. *Soit* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *le résultat de la construction fondamentale appliquée à* $N = \mathrm{Cliff}(W) \subseteq M = \mathrm{Cliff}(V)$. *Alors* L *est isomorphe à* $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$.

Preuve. Notons e_{m+1} un vecteur de base de $V \oplus -a$ correspondant au second facteur.

Puisque $\dim L = \dim_{\mathbf{K}}(N \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})) = 2^{m+1} = \dim(\mathrm{Cliff}(V \oplus -a))$ il suffit de montrer que $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ se surjecte sur L. Montrons que l'application

$$\alpha : \begin{cases} w \mapsto \lambda(w) & \\ e_m \mapsto \lambda(e_m) & (w \in W) \\ e_{m+1} \mapsto \lambda(e_m)F & \end{cases}$$

s'étend en un homomorphisme de $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ sur L. Puisque $F^2 = 1$, en utilisant le lemme 2, on a $\alpha(e_{m+1})^2 = -a$. De plus, $\alpha(e_{m+1})$ anticommute avec les générateurs de $\mathrm{Cliff}(V)$ à nouveau par le lemme 2:

$$\alpha(e_{m+1})\alpha(e_m) = -\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}),$$

et si $w \in W$

$$\begin{aligned} \alpha(e_{m+1})\lambda(w) &= \lambda(e_m)F\lambda(w) \\ &= \lambda(e_m)\lambda(w)F \quad \text{par } N\text{-linéarité de } F \\ &= -\lambda(w)\lambda(e_m)F \quad \text{puisque} \quad \langle w, e_m \rangle = 0 \\ &= -\alpha(w)\alpha(e_{m+1}). \end{aligned}$$

Les relations qui définissent $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ montrent alors que α s'étend bien en un homomorphisme d'algèbres.

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Comme l'espérance conditionnelle E est fidèle et que M est libre comme N-module à droite, on peut appliquer la proposition 2.6.3 de [GHJ], qui assure que L est engendrée comme algèbre par $\lambda(M)$ et E; mais $\lambda(M)$ est clairement dans l'image de notre homomorphisme, et E y est aussi car

$$E = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1})\right). \qquad \square$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, démontré différemment dans [Ka] Chap. III, 3.14 et 3.16:

COROLLAIRE 1. $\mathrm{Cliff}(W \oplus a \oplus -a) \cong \mathrm{Cliff}(W) \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$.

Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur deux espaces de même dimension sont isomorphes. Notons

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur $\mathbf{K}^m$. Le corollaire 1 montre l'égalité $\mathrm{Cliff}_{m+2} \cong \mathrm{Cliff}_m \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$, connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur $\mathbf{K}$. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour* $\mathbf{K}$ *algébriquement clos, on a* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est pair, et* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est impair.*

§ 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'anneaux et soit* l *un entier tels que chaque étage* M_k *de la tour associée par construction fondamentale soit un* M_k*-module libre de rang* 1. *Alors* $[M : N] = l$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du* § 1 $[\mathrm{Cliff}(V) : \mathrm{Cliff}(W)] = 2$.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et si $\beta \in \mathbf{K}^x$, une trace tr sur M est *markovienne de module* β si tr et sa restriction $\mathrm{tr}\backslash_N$ sont fidèles, et s'il existe une trace $\mathrm{Tr} : L = \mathrm{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{Tr}(\lambda(x)) = \mathrm{tr}(x)$ et $\beta\mathrm{Tr}(\lambda(x)E) = \mathrm{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k : M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur $\mathrm{Cliff}(V)$ au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$, *et* $E : M \to N$ *une espérance conditionnelle fidèle. Si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *est libre de rang* l *comme* M*-module à droite.*

Preuve. Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi : M \otimes_N M \to L : x \otimes y \mapsto \lambda(x)E\lambda(y)$$

est un isomorphisme de M-modules à droite. Mais $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$ où le dernier isomorphisme est donné par l'application M-linéaire à droite:

$$(y_1, ..., y_l) \otimes x \mapsto (y_1 x, ..., y_l x), \qquad y_i \in N, x \in M . \qquad \square$$

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que $[M : M] = 1$ et $[M : \mathbf{K}] = \dim(M)$ pour une $\mathbf{K}$-algèbre unitale M de dimension finie.

PROPOSITION 1. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$. *S'il existe une trace markovienne sur* M, *et si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors les hypothèses de lemme* 3 *sont satisfaites. En particulier,* $[M : N] = l$.

Preuve. Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur M, chaque M_k est munie d'une trace markovienne tr_k et d'une espérance conditionnelle $E_k : M_k \to M_{k-1}$, fidèle puisque M est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que M_k est libre de rang l sur M_{k-1} et donc $M_{k+1} = \mathrm{End}_{M_{k-1}}(M_k)$ est libre de rang l sur M_k. $\square$

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient G un groupe fini (d'ordre noté $|G|$), H un sous-groupe et $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbf{K}[G]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{g \in G} a_g \cdot g \, (a_g \in \mathbf{K})$ où le produit est donné par $g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 (g_1, g_2 \in G)$. Comme $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$ fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{K}[G]$ définie par

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à $\mathbf{K}[H]$ est fidèle. L'espérance conditionnelle $E : \mathbf{K}[G] \to \mathbf{K}[H]$ associée s'écrit

$$E\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right) = \sum_{g \in H} a_g \cdot g .$$

PROPOSITION 2. *Si* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle,*

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H].$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

Preuve de la proposition 2. Remarquons que $\mathbf{K}[G]$ est libre de rang $[G:H]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de H dans G fournit une base de $\mathbf{K}[G]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite. Montrons d'autre part que tr est markovienne de module $[G:H]$ sur $\mathbf{K}[G]$.

Pour cela, considérons $\mathrm{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$ comme une sous-algèbre de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$. Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}(S)$$

où Tr est la trace usuelle sur $\mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$.

Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(1) = \mathrm{tr}(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(g) = \mathrm{tr}(g) = 0 \quad \text{pour} \quad g \in G\backslash\{1\}$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\mathrm{tr}(1)}{[G:H]}$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(g)E = \mathrm{tr}(g) = 0 \quad \text{pour} \quad g \in G\backslash\{1\}.$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure. □

Le résultat ci-dessus est encore valable si $\mathbf{K}$ est de caractéristique p, pour autant que p ne divise pas $|G|$.

RÉFÉRENCES

[GHJ] GOODMAN, Frederick M., P. de la HARPE and V. JONES. Coxeter graphs and towers of algebras. A paraître dans *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, Springer-Verlag.

[J01] JONES, V. Index for subfactors. *Inventiones Math. 72* (1983), 1-25.

[J02] —— Index for subrings of rings. *Contemp. Math. 45* (Am. Math. Soc. 1985), 181-190.

[Ka] KAROUBI, M. *K-Theory*. Springer-Verlag, 1978.

[Sch] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer-Verlag, 1985.

[Se] SERRE, J. P. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1978.

(Reçu le 16 mars 1989)

Hélène Dherte

Institut de Mathématique
Université Catholique de Louvain
2, chemin du Cyclotron
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgique)