# §0. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

*L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 117-124*

# LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène DHERTE

## § 0. INTRODUCTION

Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux à unité. On note $\mathrm{End}_N(M)$ l'anneau des endomorphismes de $M$ vu comme $N$-module à droite. Pour tout $x \in M$, la multiplication à gauche $\lambda(x)$ par $x$ dans $M$ appartient à $\mathrm{End}_N(M)$; on identifie ci-dessous $M$ à son image par $\lambda: M \to \mathrm{End}_N(M)$.

Cette *construction fondamentale* fournit ainsi une paire $1 \in M \subseteq \mathrm{End}_N(M)$ à partir de $1 \in N \subseteq M$. En itérant, on obtient une *tour*:

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque $M$ et $N$ sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type $\mathrm{II}_1$, ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque $M$ et $N$ sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'*indice* de $N$ dans $M$, qui est par définition

$$[M:N] = \limsup_{k \to \infty} \mathrm{rk}\,(M_k/M_0)^{1/k}$$

où $\mathrm{rk}\,(M_k/M_0)$ est le *rang* de $M_k$ sur $M_0$, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de $M_k$ comme $M_0$-module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où $M$ est libre comme $N$-module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H]$$

où $G$ est un groupe fini, $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ l'algèbre de $G$ sur $\mathbf{K}$ et $H$ un sous-groupe de $G$ (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

## § 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, $V$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m$ et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit $W$ un hyperplan de $V$ tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

*Preuve.* Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de $W$ (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de $V$ et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur $I$ et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} . ... . e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\} . \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier $L$ à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de $V$, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\varnothing) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \varnothing$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non