Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

Autor: Dherte, Hélène

Kapitel: §0. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57369

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 117-124

LA CONSTRUCTION FONDAMENTALE DE V. JONES ET LA PÉRIODICITÉ DES ALGÈBRES DE CLIFFORD

par Hélène DHERTE

§ 0. INTRODUCTION

Soit $1 \in N \subseteq M$ une paire d'anneaux à unité. On note $\mathrm{End}_N(M)$ l'anneau des endomorphismes de M vu comme N-module à droite. Pour tout $x \in M$, la multiplication à gauche $\lambda(x)$ par x dans M appartient à $\mathrm{End}_N(M)$; on identifie ci-dessous M à son image par $\lambda: M \to \mathrm{End}_N(M)$.

Cette *construction fondamentale* fournit ainsi une paire $1 \in M \subseteq \mathrm{End}_N(M)$ à partir de $1 \in N \subseteq M$. En itérant, on obtient une *tour*:

$$1 \in M_0 = N \subseteq M_1 = M \subseteq \ldots \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \ldots$$

dont l'intérêt a été mis en évidence par V. Jones, d'abord lorsque M et N sont des algèbres de von Neumann qui sont des facteurs de type II_1, ensuite dans d'autres cas et en particulier lorsque M et N sont des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps parfait (voir [J01], [J02], [GHJ]).

Un invariant numérique fort intéressant introduit par Jones et lié à la construction fondamentale est l'*indice* de N dans M, qui est par définition

$$[M:N] = \limsup_{k \to \infty} \mathrm{rk}\,(M_k/M_0)^{1/k}$$

où $\mathrm{rk}\,(M_k/M_0)$ est le *rang* de M_k sur M_0, c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de M_k comme M_0-module à droite.

Ce travail est consacré à l'étude d'exemples où M est libre comme N-module à droite. Plus précisément, au § 1, nous montrons comment la construction fondamentale permet de retrouver certains résultats bien connus sur les algèbres de Clifford. Au § 2, nous calculons des valeurs d'indices, et nous donnons en particulier une preuve courte de l'égalité

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H]$$

où G est un groupe fini, $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ l'algèbre de G sur $\mathbf{K}$ et H un sous-groupe de G (voir [J02]).

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

§ 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie m et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit W un hyperplan de V tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

Preuve. Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de W (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de V et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur I et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} . ... . e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\} . \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier L à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de V, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\varnothing) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \varnothing$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non