§1. Algèbres de Clifford

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les résultats contenus dans cet article proviennent d'un travail de fin d'études réalisé en 1987-1988 à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de A. Valette.

§ 1. Algèbres de Clifford

Soient $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de deux, V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie m et

$$< .,. > : V \times V \to \mathbf{K}$$

une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note $\mathrm{Cliff}(V)$ l'algèbre de Clifford de cette forme. Soit W un hyperplan de V tel que la restriction $< .,. > |_W$ est non dégénérée. L'objet de ce paragraphe est l'étude de la paire d'algèbre $\mathrm{Cliff}(W) \subseteq \mathrm{Cliff}(V)$ (ces algèbres sont semi-simples [Sch]).

Lemme 1. *L'algèbre* $\mathrm{Cliff}(V)$ *est libre de rang 2 comme* $\mathrm{Cliff}(W)$-*module à droite.*

Preuve. Soit $e_m \in V$ un vecteur tel que $<e_m, e_m> \neq 0, e_m \notin W$ et $e_m^{\perp} = W$. Montrons que $\{1, e_m\}$ est une base de $\mathrm{Cliff}(V)$ comme $\mathrm{Cliff}(W)$-module à droite. En effet, si $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ est une base orthogonale de W (une telle base existe [Sch]) alors $\{e_1, ..., e_{m-1}, e_m\}$ est une base orthogonale de V et en utilisant les relations entre les générateurs de $\mathrm{Cliff}\, V$, on peut écrire de manière unique tout élément de $M = \mathrm{Cliff}\, V$ sous la forme

$$\sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J$$

(sommes sur I et $J \subset \{1, ..., m-1\}$) où

$$e_I = e_{i_1} . ... . e_{i_k} \quad \text{si} \quad I = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., m-1\} . \qquad \square$$

Posons $N = \mathrm{Cliff}(W) \subset M = \mathrm{Cliff}(V)$ et $L = \mathrm{End}_N(M)$. Il résulte du lemme que $L = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}) \otimes N$ (nous notons $\mathrm{Mat}_l(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices $l \times l$ à coefficients dans $\mathbf{K}$). Nous allons identifier L à une algèbre de Clifford. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de V, et $(e_I)_{I \subset \{1, ..., m\}}$ la base associée de $\mathrm{Cliff}(V)$, comme dans la preuve du lemme 1. Soit $\mathrm{tr}: M \to \mathbf{K}$ la forme linéaire définie par $\mathrm{tr}(e_\varnothing) = 1$ et $\mathrm{tr}(e_I) = 0$ si $I \neq \varnothing$.

On vérifie que tr est une trace ($\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous $x, y \in M$) qui est fidèle (au sens que la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{tr}(xy)$ est non

dégénérée); tr ne dépend pas du choix de la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et sa restriction à N est encore fidèle. On peut donc définir la projection orthogonale

$$E \begin{cases} M & \to & N \\ \sum \lambda_I e_I + e_m \sum \lambda_J e_J & \mapsto & \sum \lambda_I e_I \end{cases}$$

(sommes sur $I, J \subset \{1, ..., m-1\}$) relative à la forme $(x, x') \mapsto \operatorname{tr}(xx')$. On montre que E possède les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(E(x)) &= \operatorname{tr}(x), \ \forall x \in M \\ E(y) &= y, \ \forall y \in N \\ E(xy) &= E(x)y, \ \forall x \in M, y \in N \\ E(yx) &= yE(x), \ \forall x \in M, y \in N \end{aligned}$$

(voir [GHJ] 2.6.2). En d'autres termes, E est une *espérance conditionnelle* de M sur N. On vérifie aussi qu'elle est *fidèle*: si $x \in M$ est tel que $E(xx') = 0$ pour tout $x' \in M$, alors $x = 0$. La troisième propriété ci-dessus montre que $E \in L$.

LEMME 2. *Avec les notations précédentes, on pose* $a = \langle e_m, e_m \rangle$ *et* $F = 2E - 1$. *Alors*

(i) $N^\perp = \lambda(e_m)(N)$,

(ii) $\lambda(e_m) F \lambda(e_m) = -aF$ *dans* L.

Preuve. (i) Si $x, y \in N$, on a $\operatorname{tr}(e_m xy) = 0$ et puisque $e_m x \in \lambda(e_m)N$, il vient $\lambda(e_m)N \subseteq N^\perp$.

Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons que comme $\dim N = 2^{m-1}$, $\dim M = 2^m$ et $M = N \oplus N^\perp$, on a $\dim N^\perp = 2^{m-1}$. De plus $\lambda(e_m): N \to N^\perp$ est bijective puisque $\lambda(e_m)^2 = a \cdot 1_M$. On en tire $N^\perp = \lambda(e_m)N$.

(ii) Soit $y \in N$. Alors $F\lambda(e_m)y = -\lambda(e_m)y$ puisque $F = 2E - 1$ et $N^\perp = \lambda(e_m)N = -\lambda(e_m)Fy$.

Soit $x \in N^\perp$, alors $F\lambda(e_m)x = \lambda(e_m)x = -\lambda(e_m)Fx$.

Donc $F\lambda(e_m) = -\lambda(e_m)F$ et on a le résultat annoncé en multipliant à gauche par $\lambda(e_m)$. $\square$

Notons $V \oplus -a$ l'espace vectoriel $V \oplus \mathbf{K}$ muni de la forme bilinéaire symétrique $((x, \lambda), (x', \lambda')) \mapsto \langle x, x' \rangle - a\lambda\lambda'$.

THÉORÈME. *Soit* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *le résultat de la construction fondamentale appliquée à* $N = \mathrm{Cliff}(W) \subseteq M = \mathrm{Cliff}(V)$. *Alors* L *est isomorphe à* $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$.

Preuve. Notons e_{m+1} un vecteur de base de $V \oplus -a$ correspondant au second facteur.

Puisque $\dim L = \dim_{\mathbf{K}}(N \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})) = 2^{m+1} = \dim(\mathrm{Cliff}(V \oplus -a))$ il suffit de montrer que $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ se surjecte sur L. Montrons que l'application

$$\alpha : \begin{cases} w \mapsto \lambda(w) & \\ e_m \mapsto \lambda(e_m) & (w \in W) \\ e_{m+1} \mapsto \lambda(e_m)F & \end{cases}$$

s'étend en un homomorphisme de $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ sur L. Puisque $F^2 = 1$, en utilisant le lemme 2, on a $\alpha(e_{m+1})^2 = -a$. De plus, $\alpha(e_{m+1})$ anticommute avec les générateurs de $\mathrm{Cliff}(V)$ à nouveau par le lemme 2:

$$\alpha(e_{m+1})\alpha(e_m) = -\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1}),$$

et si $w \in W$

$$\begin{aligned} \alpha(e_{m+1})\lambda(w) &= \lambda(e_m)F\lambda(w) \\ &= \lambda(e_m)\lambda(w)F \quad \text{par } N\text{-linéarité de } F \\ &= -\lambda(w)\lambda(e_m)F \quad \text{puisque} \quad \langle w, e_m \rangle = 0 \\ &= -\alpha(w)\alpha(e_{m+1}). \end{aligned}$$

Les relations qui définissent $\mathrm{Cliff}(V \oplus -a)$ montrent alors que α s'étend bien en un homomorphisme d'algèbres.

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Comme l'espérance conditionnelle E est fidèle et que M est libre comme N-module à droite, on peut appliquer la proposition 2.6.3 de [GHJ], qui assure que L est engendrée comme algèbre par $\lambda(M)$ et E; mais $\lambda(M)$ est clairement dans l'image de notre homomorphisme, et E y est aussi car

$$E = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\alpha(e_m)\alpha(e_{m+1})\right). \qquad \square$$

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, démontré différemment dans [Ka] Chap. III, 3.14 et 3.16:

COROLLAIRE 1. $\mathrm{Cliff}(W \oplus a \oplus -a) \cong \mathrm{Cliff}(W) \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$.

Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur deux espaces de même dimension sont isomorphes. Notons

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur $\mathbf{K}^m$. Le corollaire 1 montre l'égalité $\mathrm{Cliff}_{m+2} \cong \mathrm{Cliff}_m \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$, connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur $\mathbf{K}$. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour* $\mathbf{K}$ *algébriquement clos, on a* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est pair, et* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est impair.*

§ 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'anneaux et soit* l *un entier tels que chaque étage* M_k *de la tour associée par construction fondamentale soit un* M_k*-module libre de rang* 1. *Alors* $[M : N] = l$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du* § 1 $[\mathrm{Cliff}(V) : \mathrm{Cliff}(W)] = 2$.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et si $\beta \in \mathbf{K}^x$, une trace tr sur M est *markovienne de module* β si tr et sa restriction $\mathrm{tr}\backslash_N$ sont fidèles, et s'il existe une trace $\mathrm{Tr} : L = \mathrm{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{Tr}(\lambda(x)) = \mathrm{tr}(x)$ et $\beta\mathrm{Tr}(\lambda(x)E) = \mathrm{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k : M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur $\mathrm{Cliff}(V)$ au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$, *et* $E : M \to N$ *une espérance conditionnelle fidèle. Si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *est libre de rang* l *comme* M*-module à droite.*