§2. Valeurs de l'indice

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cliff_m l'algèbre de Clifford d'une telle forme sur $\mathbf{K}^m$. Le corollaire 1 montre l'égalité $\mathrm{Cliff}_{m+2} \cong \mathrm{Cliff}_m \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K})$, connue sous le nom de *périodicité des algèbres de Clifford* sur $\mathbf{K}$. Le corollaire suivant en est une conséquence immédiate.

COROLLAIRE 2. *Pour* $\mathbf{K}$ *algébriquement clos, on a* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est pair, et* $\mathrm{Cliff}_m \cong \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Mat}_{2^{m-1/2}}(\mathbf{K})$ *lorsque* m *est impair.*

§ 2. VALEURS DE L'INDICE

La preuve du lemme suivant résulte immédiatement de la définition de l'indice donnée dans l'introduction.

LEMME 3. *Soit* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'anneaux et soit* l *un entier tels que chaque étage* M_k *de la tour associée par construction fondamentale soit un* M_k*-module libre de rang* 1. *Alors* $[M : N] = l$.

COROLLAIRE. *Avec les notations du* § 1 $[\mathrm{Cliff}(V) : \mathrm{Cliff}(W)] = 2$.

Il peut être intéressant d'avoir un critère qui assure que les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées. Pour cela, on aura besoin de la notion de trace markovienne. Si $1 \in N \subseteq M$ est une paire d'algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, et si $\beta \in \mathbf{K}^x$, une trace tr sur M est *markovienne de module* β si tr et sa restriction $\mathrm{tr}\backslash_N$ sont fidèles, et s'il existe une trace $\mathrm{Tr} : L = \mathrm{End}_N(M) \to \mathbf{K}$ telle que $\mathrm{Tr}(\lambda(x)) = \mathrm{tr}(x)$ et $\beta\mathrm{Tr}(\lambda(x)E) = \mathrm{tr}(x)$ pour tout $x \in M$, où E est l'espérance conditionnelle définie avant le lemme 2. On peut alors montrer que Tr est elle-même markovienne de module β pour la paire $M \subset L$ ([GHJ] 2.7.4), ce qui permet de définir une trace sur $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ et une suite d'espérances conditionnelles fidèles $E_k : M_k \to M_{k-1}$.

On vérifie aisément que la trace tr définie sur $\mathrm{Cliff}(V)$ au § 1 est markovienne de module 2.

LEMME 4. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$, *et* $E : M \to N$ *une espérance conditionnelle fidèle. Si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors* $L = \mathrm{End}_N(M)$ *est libre de rang* l *comme* M*-module à droite.*

Preuve. Par la proposition 2.6.3 de [GHJ], l'application

$$\phi : M \otimes_N M \to L : x \otimes y \mapsto \lambda(x)E\lambda(y)$$

est un isomorphisme de M-modules à droite. Mais $M \otimes_N M \cong N^l \otimes_N M \cong M^l$ où le dernier isomorphisme est donné par l'application M-linéaire à droite:

$$(y_1, ..., y_l) \otimes x \mapsto (y_1 x, ..., y_l x), \qquad y_i \in N, x \in M . \qquad \square$$

Des lemmes 3 et 4, on déduit immédiatement que $[M : M] = 1$ et $[M : \mathbf{K}] = \dim(M)$ pour une $\mathbf{K}$-algèbre unitale M de dimension finie.

PROPOSITION 1. *Soient* $1 \in N \subseteq M$ *une paire d'algèbres de dimension finie sur* $\mathbf{K}$. *S'il existe une trace markovienne sur* M, *et si* M *est libre de rang* l *comme* N*-module à droite, alors les hypothèses de lemme* 3 *sont satisfaites. En particulier,* $[M : N] = l$.

Preuve. Grâce à l'existence d'une trace markovienne sur M, chaque M_k est munie d'une trace markovienne tr_k et d'une espérance conditionnelle $E_k : M_k \to M_{k-1}$, fidèle puisque M est de dimension finie.

En procédant par induction à partir du lemme 4, on voit que M_k est libre de rang l sur M_{k-1} et donc $M_{k+1} = \mathrm{End}_{M_{k-1}}(M_k)$ est libre de rang l sur M_k. $\square$

Un cas où la proposition 1 s'applique est celui des algèbres de groupes. Soient G un groupe fini (d'ordre noté $|G|$), H un sous-groupe et $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle. On rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbf{K}[G]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{g \in G} a_g \cdot g \, (a_g \in \mathbf{K})$ où le produit est donné par $g_1 \cdot g_2 = g_1 g_2 (g_1, g_2 \in G)$. Comme $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, $\mathbf{K}[G]$ est semi-simple (voir [Se]).

L'inclusion $1 \in \mathbf{K}[H] \subseteq \mathbf{K}[G]$ fournit un exemple de paire d'algèbres semi-simples de dimension finie. La fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{K}[G]$ définie par

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right) = a_1$$

est une trace fidèle dont la restriction à $\mathbf{K}[H]$ est fidèle. L'espérance conditionnelle $E : \mathbf{K}[G] \to \mathbf{K}[H]$ associée s'écrit

$$E\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g\right) = \sum_{g \in H} a_g \cdot g .$$

PROPOSITION 2. *Si* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique nulle,*

$$[\mathbf{K}[G]:\mathbf{K}[H]] = [G:H].$$

Cette proposition est en fait bien connue ([J01], [J02]); c'est elle qui justifie l'appellation d'indice. La preuve ci-dessous semble neuve:

Preuve de la proposition 2. Remarquons que $\mathbf{K}[G]$ est libre de rang $[G:H]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite: en effet, le choix d'un système de représentants pour les classes latérales gauches de H dans G fournit une base de $\mathbf{K}[G]$ comme $\mathbf{K}[H]$-module à droite. Montrons d'autre part que tr est markovienne de module $[G:H]$ sur $\mathbf{K}[G]$.

Pour cela, considérons $\mathrm{End}_{\mathbf{K}[H]}(\mathbf{K}[G])$ comme une sous-algèbre de l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[G]) = \mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$. Cette dernière algèbre est munie de la trace

$$S \mapsto \frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}(S)$$

où Tr est la trace usuelle sur $\mathrm{Mat}_{|G|}(\mathbf{K})$.

Il est alors banal de vérifier que

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(1) = \mathrm{tr}(1) = 1$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(g) = \mathrm{tr}(g) = 0 \quad \text{pour} \quad g \in G\backslash\{1\}$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,E = \frac{|H|}{|G|} = \frac{\mathrm{tr}(1)}{[G:H]}$$

$$\frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\,\lambda(g)E = \mathrm{tr}(g) = 0 \quad \text{pour} \quad g \in G\backslash\{1\}.$$

Par linéarité, on en déduit la propriété annoncée. La proposition 1 s'applique donc et permet de conclure. □

Le résultat ci-dessus est encore valable si $\mathbf{K}$ est de caractéristique p, pour autant que p ne divise pas $|G|$.