§6. L'ÉGALITÉ ET LE PROBLEME DE J. ROBINSON

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$(*) \qquad \mathrm{Sat}_{\cong_A}(\rho) = \bigcup_{I \subseteq \{1, \ldots, k\},\, p = |I|} \mathrm{Ext}_I[(\mathbf{N} \backslash M)^p \cap \mathrm{Proj}_I[\mathrm{Sat}_{\cong_A}(\rho)]] .$$

On note $K_{i,a}$ l'ensemble $K_{i,a} = \{x > m : \mathrm{SUPP}(x+a) = \mathrm{SUPP}(|i+a|)\}$. Il est clair que si $-m \leqslant a \leqslant 0$ l'ensemble $K_{i,a}$ est (Pred; $\perp$)-définissable. Comme $M = [M \cap \{0, 1, \ldots, m\}] \cup [\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \bigcap_{a \in A} K_{i,a}]$, on en déduit que M est (Pred; $\perp$)-définissable.

Il en résulte que si X est (Pred; $\perp$)-définissable alors il en est de même des $\mathrm{Ext}_I(X)$.

7°) On peut maintenant achever la preuve du point iii) du Théorème. Si ρ est saturée pour $\cong_A$ alors les $\mathrm{Proj}_I[\mathrm{Sat}_{\cong_A}(\rho)]$ le sont aussi. Le point 5°) montre que les $(\mathbf{N} \backslash M)^p \cap \mathrm{Proj}_I[\mathrm{Sat}_{\cong_A}(\rho)]$ sont (Pred; $\perp$)-définissables, il en résulte que les $\mathrm{Ext}_I[(\mathbf{N} \backslash M)^p \cap \mathrm{Proj}_I[\mathrm{Sat}_{\cong_A}(\rho)]]$ le sont aussi, et donc également ρ.

8°) Dans le cas général où A comprend des éléments positifs et d'autres négatifs, on raisonne comme dans les points 4°) à 7°). Cependant, la fonction T_A est, dans ce cas, une composée d'itérées des deux fonctions S et Pred avec la fonction de brassage $x \mapsto (x, \ldots, x)$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^n$. C'est donc alors la famille des relations définissables dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \ldots \rangle$ qui est stable par image réciproque par T_A. D'où la nécessité (à priori) d'introduire le langage $(S, \mathrm{Pred}; \perp)$.

§ 6. L'égalité et le problème de J. Robinson

6.1. Le résultat ci-dessous — à priori technique — s'avère être un outil performant dans l'étude du rôle de l'égalité en face de S et $\perp$.

Définition. Soit A une partie finie de $\mathbf{Z}$. Une relation ρ, incluse dans $\mathbf{N}^{k+1}$, est dite *quasi-saturée* pour $\cong_A$ si elle est saturée en toutes ses variables sauf peut-être la première, c'est-à-dire que lorsque $x_i \cong_A y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, alors les $(k+1)$-uplets $(z, x_1, \ldots, x_k)$ et $(z, y_1, \ldots, y_k)$ sont simultanément dans ρ ou hors de ρ.

Exemple. D'après la Proposition 2.13, toutes les parties de $\mathbf{N} \times PP^k$ (où PP est l'ensemble des primaires) sont quasi-saturées pour $\cong_A$ si A contient $\{0, 1, 2\}$ ou $\{-2, -1, 0\}$.

Lemme. *Soit A une partie finie de $\mathbf{Z}$. Soient $\rho_1, \ldots, \rho_p, \theta$ des relations définissables dans la structure $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$ et chacune quasi-*

saturée pour $\cong_A$. *On suppose que* θ *est incluse dans* $\mathbf{N}^2$ *et que la deuxième projection* Δ *de* θ *(i.e.* $\Delta = \{x_0 : \text{il existe } x \text{ tel que } (x, x_0) \in \theta\}$*) est une partie de* $\mathbf{N}$ *définissable dans* $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$.

Si τ *est une relation définissable dans* $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$ *et incluse dans* $\mathbf{N}^n$, *alors les relations*

$$\tau' = \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : \text{il existe } x \text{ tel que } (x, x_0) \in \theta \text{ et } (x, x_1, ..., x_{n-1}) \in \tau\},$$

$$\tau'' = \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : x_0 \in \Delta \text{ et, pour tout } x, \text{ si } (x, x_0) \in \theta \text{ alors } (x, x_1, ..., x_{n-1}) \in \tau\}$$

sont également définissables dans la structure $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$ *(c'est-à-dire sans faire intervenir la relation* θ*).*

Preuve. 1°) Le fait que Δ soit la deuxième projection de θ et la quasi-saturation de θ pour $\cong_A$ montrent que Δ est $(\cong_A)$-saturé. Comme, relativement à τ' et τ'', la variable x_0 varie dans Δ, on voit que τ' et τ'' sont $(\cong_A)$-saturées par rapport à x_0.

2°) Si X est une partie de $\mathbf{Z}$, posons $T_{i,j}(X) = \{-j, ..., 0\} \cup [X + \{i-j\}]$. Si $u \cong_{T_{i,j}(X)} v$ alors (cf. la preuve de 4.11) on voit facilement que

— si $x \leqslant j$ ou $y \leqslant j$ alors $T_{i,j}(X)$ contient $-x$ ou $-y$ et donc $x = y$,

— $x + (i-j) \cong_X y + (i-j)$.

Il en résulte que $S^i[\mathrm{Pred}^j(u)] \cong_X S^i[\mathrm{Pred}^j(v)]$.

3°) Par récurrence sur la complexité de la formule $F(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ qui définit τ dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$, on construit des formules F' et F'' qui définissent τ' et τ'' dans cette même structure.

L'étape d'induction, c'est-à-dire l'introduction des connecteurs et quantificateurs (qui, en termes ensemblistes (cf. 3.6), correspond aux opérations booléennes et aux projections) est évidente: si $D(x_0)$ définit Δ avec S, Pred et $\perp$, alors

$$(\exists x_i F)' \text{ est } \exists x_i(F'), (F \vee G)' \text{ est } F' \vee G', (\neg F)' \text{ est } \neg(F'') \wedge D(x_0);$$

$$(\forall x_i F)'' \text{ est } \forall x_i(F''), (F \wedge G)'' \text{ est } F'' \wedge G'', (\neg F)'' \text{ est } \neg(F') \wedge D(x_0).$$

L'étape initiale de la récurrence concerne les formules atomiques, c'est-à-dire les relations τ qui sont images réciproques des relations $\perp, R_1, ..., R_p$ par les composées des fonctions S et Pred avec les fonctions de brassage. Les termes du langage $(S, \mathrm{Pred}; \perp, R_1, ..., R_p)$ se ramènent (après simplification des $\mathrm{Pred} \circ S$) à ceux de la forme $t(x) = S^i[\mathrm{Pred}^j(x)]$ où x est une variable. D'où les différents cas considérés ci-dessous.

4°) *Cas où* F *est* $t(x_0) \perp u(x_0)$

Dans ce cas τ' et τ'' ne comportent qu'un seul argument et le point 1°) montre qu'elles sont $(\cong_A)$-saturées et donc, d'après le Théorème 4.10, définissables dans la structure $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$.

5°) *Cas où* F *est* $t_0(x_0) \perp t_1(x_1)$

Si le terme $t_1(x_1)$ est $S^i[\mathrm{Pred}^j(x_1)]$ alors la $(\cong_{\{0\}})$-saturation de $\perp$ implique la $(\cong_{T_{i,j}(\{0\})})$-saturation par rapport à x_1 de la relation τ et donc aussi de τ' et τ''. Compte tenu de 1°), les relations τ' et τ'' sont $(\cong_{T_{i,j}(\{0\})A})$-saturées, et donc (Théorème 4.10) définissables dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$.

6°) *Cas où* $F(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ *est* $R_\alpha(t_1[x_{\sigma(1)}], ..., t_{k_\alpha}[x_{\sigma(k_\alpha)}])$, *où* $1 \leqslant \alpha \leqslant p-1$, $\sigma: \{1, ..., k_\alpha\} \to \{0, ..., n-1\}$ *et* $\sigma(1) = 0$.

Si $t_{i_r, j_r}(x_{\sigma(r)})$ est $S^{i_r}[\mathrm{Pred}^{j_r}(x_{\sigma(i)})]$, on pose $B = T_{i_1, j_1}(A) \cup ... \cup T_{i_{k_\alpha}, j_{k_\alpha}}(A)$. De la $(\cong_A)$-quasi-saturation de l'interprétation ρ_α de R_α, on déduit la $(\cong_B)$-saturation de τ par rapport aux variables x_i telles que $i \neq \sigma(1) = 0$, et donc aussi le même résultat relatif à τ' et τ''. Le point 1°) assure alors que τ' et τ'' sont $(\cong_{B \cup A})$-saturées et donc (Théorème 4.10) définissables dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$.

7°) *Cas où* $F(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ *est* $R_\alpha(t_1[x_{\sigma(1)}], ..., t_{k_\alpha}[x_{\sigma(k_\alpha)}])$, *où* $1 \leqslant \alpha \leqslant p-1$, $\sigma: \{1, ..., k_\alpha\} \to \{0, ..., n-1\}$ *et* $\sigma(1) \neq 0$.

Soit B défini comme au point 6°). On pose

$$\lambda = \{(z, x_0) : \text{il existe } x \text{ tel que } z \cong_B x \text{ et } (x, x_0) \in \theta\}.$$

Comme θ est $(\cong_A)$-quasi-saturée, λ est $(\cong_{B \cup A})$-saturée et donc (Théorème 4.10) définissable dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$. La $(\cong_A)$-quasi-saturation de ρ_α montre la $(\cong_B)$-saturation de τ par rapport aux variables x_i telles que $i \neq \sigma(1)$, en particulier celles telles que $\sigma(i) = 0$ (car $\sigma(1) \neq 0$). On a donc

$$\begin{aligned}
\tau' &= \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : \text{il existe } x \text{ tel que } (x, x_0) \in \theta \text{ et } (y_1, ..., y_{k_\alpha}) \in \rho_\alpha \text{ où} \\
&\qquad y_i \text{ vaut } t_i[x_{\sigma(i)}] \text{ si } \sigma(i) \neq 0 \text{ et vaut } t_i[x] \text{ si } \sigma(i) = 0\}, \\
&= \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : \text{il existe } z \text{ tel que } (z, x_0) \in \lambda \text{ et } (y_1, ..., y_{k_\alpha}) \in \rho_\alpha \text{ où} \\
&\qquad y_i \text{ vaut } t_i[x_{\sigma(i)}] \text{ si } \sigma(i) \neq 0 \text{ et vaut } t_i[z] \text{ si } \sigma(i) = 0\}. \\
\tau'' &= \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : x_0 \in \Delta \text{ et pour tout } x, \text{ si } (x, x_0) \in \theta \text{ alors} \\
&\qquad (y_1, ..., y_{k_\alpha}) \in \rho_\alpha \text{ où } y_i \text{ vaut } t_i[x_{\sigma(i)}] \text{ si } \sigma(i) \neq 0 \text{ et vaut} \\
&\qquad t_i[x] \text{ si } \sigma(i) = 0\}, \\
&= \{(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) : x_0 \in \Delta \text{ et pour tout } z, \text{ si } (z, x_0) \in \lambda \text{ alors} \\
&\qquad (y_1, ..., y_{k_\alpha}) \in \rho_\alpha \text{ où } y_i \text{ vaut } t_i[x_{\sigma(i)}] \text{ si } \sigma(i) \neq 0 \text{ et vaut} \\
&\qquad t_i[z] \text{ si } \sigma(i) = 0\}.
\end{aligned}$$

Ces égalités donnent des définitions de τ' et τ'' à partir de Δ, λ et ρ_α, et donc (puisque Δ et λ sont définissables avec S, Pred et $\perp$) des définitions de τ' et τ'' dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_\alpha \rangle$.

6.2. Le résultat suivant est une extension du Théorème de Woods sur l'équivalence du Problème de Robinson et de la $(S; \perp)$-définissabilité de l'égalité.

THÉORÈME. *Soient* $\rho_1, ..., \rho_p, \varphi_1, ..., \varphi_q$ *des relations et fonctions définissables dans* $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$. *On suppose que* $\rho_1, ..., \rho_p$ *et les graphes de* $\varphi_1, ..., \varphi_q$ *sont quasi-saturés pour* $\cong_A$ *où* A *est une partie finie de* $\mathbf{Z}$ *(c'est le cas, en particulier, si ces relations et graphes sont inclus dans un produit* $\mathbf{N} \times [PP^k + B]$ *où* B *est une partie finie de* $\mathbf{Z}$*).*

Si l'égalité est définissable dans $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}, \varphi_1, ..., \varphi_q; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$ *(resp.* $\langle \mathbf{N}; S, \varphi_1, ..., \varphi_q; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$, *resp.* $\langle \mathbf{N}; \mathrm{Pred}, \varphi_1, ..., \varphi_q; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$*) alors cette structure définit les mêmes relations et fonctions que* $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$.

Preuve. Appliquons le Lemme 6.1 avec les relations ρ_i et les graphes des φ_j, et, pour τ la relation d'égalité, pour θ le graphe de la fonction $x \mapsto 5^x$ (graphe qui est bien quasi-saturé puisque son second argument est toujours un primaire). On observe que τ' est l'image de θ par la fonction de brassage $(x, y) \mapsto (y, x)$. La $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_1, ..., \rho_p, Gr(\varphi_1), ... Gr(\varphi_q) \rangle$-définissabilité de τ', et donc de θ, permet de conclure à celle de $+$ et $\times$, grâce à la Proposition 5.12.

On achève la preuve en observant que la définissabilité de l'égalité dans la structure $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}, \varphi_1, ..., \varphi_q; \perp, \rho_1, ..., \rho_p \rangle$ montre l'équivalence de cette structure et de $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp, \rho_1, ..., \rho_p, Gr(\varphi_1), ... Gr(\varphi_q) \rangle$.

On remarque enfin que si l'égalité est définissable avec les ρ_i, φ_j, $\perp$ et S sans l'aide de Pred (resp. avec Pred sans l'aide de S) alors la fonction Pred (resp. S) l'est aussi.

Remarque. Considérant pour ρ la relation d'égalité, on voit que la condition de quasi-saturation des ρ_α ne peut pas être levée dans le Lemma 6.1 ni dans le présent Théorème (sauf si la conjecture d'Erdös-Woods est vraie!).

6.3. Une application simple du Théorème 6.2 est la suivante:

THÉORÈME. *Soit* J *une injection de domaine* $\mathbf{N}$ *à valeurs dans les primaires et définissable dans* $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$.

Les trois structures $\langle \mathbf{N}; S, J; \perp \rangle$, $\langle \mathbf{N}; \mathrm{Pred}, J; \perp \rangle$ *et* $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$ *définissent les mêmes relations et fonctions.*

Preuve. La relation d'égalité est définissable dans la structure $\langle \mathbf{N}; S, J; \perp \rangle$ par la formule $J(x) =_{PP} J(y)$ (cf. 5.5 pour la définition de $=_{PP}$). On conclut en appliquant le Théorème 6.2 avec pour ρ le graphe de J (qui est quasi-saturé car à valeurs dans les primaires).

6.4. Une autre application simple du Théorème 6.2 est la suivante:

Soit EXP la relation binaire $\mathrm{EXP} = \{(x, y)\colon \text{il existe } a \geqslant 0 \text{ tel que } y = a^x\}$.

THÉORÈME. *Les trois structures* $\langle \mathbf{N}; S; \perp, \mathrm{EXP} \rangle$, $\langle \mathbf{N}; S; \perp, \mathrm{EXP} \rangle$ *et* $\langle \mathbf{N}; +, \times; = \rangle$ *définissent les mêmes relations et fonctions.*

Preuve. On considère seulement le cas $(S; \perp, \mathrm{EXP})$. Soit A l'ensemble $A = \mathrm{EXP} \cap [\mathbf{N} \times PP] = \{(x, p^x)\colon x \in \mathbf{N} \text{ et } p \in P\}$. On observe que l'égalité $x = y$ équivaut à l'existence d'un z tel que (x, z) et (y, z) soient dans A. L'égalité est donc définissable dans la structure $\langle \mathbf{N}; S; \perp, A \rangle$.

Comme A est incluse dans $\mathbf{N} \times PP$, elle est quasi-saturée pour $\cong_{\{0,1,2\}}$, et le Théorème 6.2 montre que $+$ et $\times$ sont définissables dans la structure $\langle \mathbf{N}; S; \perp, A \rangle$. On conclut en remarquant que la relation A est elle-même définissable dans la structure $\langle \mathbf{N}; S; \perp, \mathrm{EXP} \rangle$ par la formule $PP(y) \wedge \mathrm{EXP}(x, y)$.

6.5. Le Théorème ci-dessous est un fait curieux que l'on peut énoncer ainsi:

bien qu'il apparaisse difficile de la définir avec successeur et coprimarité, la relation d'égalité n'a pourtant pas un pouvoir de définissabilité important, sa contribution — en face de S *et* $\perp$ *— se limite à se définir elle-même ainsi que le graphe des itérés de* S *et elle n'est pas en mesure d'utiliser la puissance des quantifications!*

THÉORÈME. *Toute formule du langage* $(S, \mathrm{Pred}; =, \perp)$ *équivaut à une combinaison booléenne de formules du langage* $(S, \mathrm{Pred}; \perp)$ *— formules sans égalité — et de formules du type* $x = S^i(y)$ *(resp.* $x = \mathrm{Pred}^i(y)$*) — formules sans quantificateur —.*

En termes ensemblistes, la classe des relations $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; =, \perp \rangle$*-définissables coïncide avec la classe des relations obtenues par combinaisons booléennes*

— *des relations définissables dans la structure* $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$,

— *des graphes des itérées de la fonction successeur (resp. prédécesseur) et leurs images réciproques par les fonctions* $f_{p,\alpha,\beta}: (x_1, ..., x_p) \mapsto (x_\alpha, x_\beta)$ *où* $1 \leqslant \alpha \leqslant p, 1 \leqslant \beta \leqslant p, \alpha \neq \beta$.

Preuve. 1°) On commence par montrer que toute formule du langage $(S, \mathrm{Pred}; =, \perp)$ équivaut à une formule de ce même langage dont les sous-formules atomiques sont particulièrement simples. C'est l'objet des points 2°) à 4°).

2°) Si t_1 et t_2 sont des termes, les formules $t_1 \perp t_2$ et $t_1 = t_2$ sont équivalentes à

$$\exists z_1 \exists z_2 [(z_1 = t_1) \wedge (z_2 = t_2) \wedge (z_1 \perp z_2)] \quad \text{et} \quad \exists z_1 \exists z_2 [(z_1 = t_1) \wedge (z_2 = t_2) \wedge (z_1 = z_2)] .$$

Toute formule est donc équivalente à une autre dans laquelle les sous-formules atomiques sont toutes de la forme $t = x$ ou $x \perp y$ où t est un terme et x, y sont des variables.

3°) Comme $\mathrm{Pred} \circ S$ est l'identité, on peut se ramener au cas où tous les termes sont de la forme $S^i[\mathrm{Pred}^j(z)]$ où z est une variable.

4°) On a déjà vu (cf. 5.3) que tout singleton, et donc toute relation finie ou cofinie, est définissable avec $\perp$ et S ou Pred.

Comme $S^i[\mathrm{Pred}^j(z)]$ vaut i si $z \leqslant j$ et vaut $z + i - j$ si $z \geqslant j$, la formule $S^i[\mathrm{Pred}^j(z)] = x$ est équivalente à :

$$\begin{array}{lll} [(x=z) \wedge (z \geqslant j)] \vee [(x=i) \wedge (z \leqslant j)] & \text{si} & i = j , \\ [(x=\mathrm{Pred}^{j-1}(z)) \wedge (z \geqslant j)] \vee [(x=i) \wedge (z \leqslant j)] & \text{si} & i < j , \\ [(x=S^{i-j}(z)) \wedge (z \geqslant j)] \vee [(x=i) \wedge (z \leqslant j)] & \text{si} & i > j . \end{array}$$

Ces formules sont de la forme $[(t=x) \wedge A(x)] \vee B(x, z)$ où A et B sont écrites avec Pred et $\perp$, et t est un terme du type $S^k(z)$ ou $\mathrm{Pred}^k(z)$.

Notons enfin que la formule $x = x$ est toujours vraie et équivaut à $\neg(x \perp x)$; si $k \neq 0$, la formule $x = S^k(x)$ est toujours fausse et équivaut à $(x \perp x) \wedge \neg(x \perp x)$, la formule $x = \mathrm{Pred}^k(x)$ équivaut à $x = 0$.

On voit donc que

(*) *Toute formule est équivalente à une formule dont les sous-formules atomiques sont toutes de la forme* $x = S^k(y)$ *ou* $x = \mathrm{Pred}^k(y)$ *ou encore* $x \perp z$, *où* x, y *sont des variables distinctes,* z *une variable et* $k \geqslant 0$.

5°) Notons enfin que la formule $x = S^k(y)$ est équivalente à $(y = \mathrm{Pred}^k(x)) \wedge (x \geqslant k)$, laquelle est de la forme $(y = \mathrm{Pred}^k(x)) \wedge A(x)$, où A est écrite avec Pred et $\perp$ (et sans égalité).

De même, la formule $x = \mathrm{Pred}^k(y)$ est équivalente à $(y = S^k(x)) \vee [(x=0) \wedge (y \leqslant k)]$, de la forme $(y = \mathrm{Pred}^k(x)) \wedge B(x, y)$ où B est écrite sans égalité. Ainsi, on peut donc échanger les sous-formules $x = \mathrm{Pred}^k(y)$ et $y = S^k(x)$, modulo l'introduction d'autres sous-formules du langage (Pred, $\perp$) ou (S, $\perp$).

6°) Le point 5°) montre qu'il suffit, pour prouver le Théorème, de pouvoir associer à toute formule $F(x_1, ..., x_p)$ du langage (S, Pred; $=$, $\perp$) une formule *équivalente* $F'(x_1, ..., x_p)$ qui est combinaison booléenne de formules du langage (S, Pred, $\perp$) et de formules du type $S^i(x) = y$ ou $\mathrm{Pred}^i(x) = y$, où x, y sont des variables. Les points 2°) à 4°) montrent que l'on peut se restreindre aux formules $F(x_1, ..., x_p)$ du langage (S, Pred; $=$, $\perp$) qui ont la propriété (*).

La construction procède alors par récurrence sur la complexité de F.

7°) L'initialisation de la récurrence indiquée en 6°) est l'étude du cas des formules atomiques. Puisque F vérifie (*), les seuls cas à étudier sont $x = S^k(y)$, $x = \mathrm{Pred}^k(y)$ et $x \perp y$; il est évident qu'il suffit de prendre alors F' égale à F.

8°) L'étape d'induction de cette récurrence concerne l'introduction des connecteurs et du quantificateur existentiel.

Le passage aux connecteurs est évident: $(\neg F)'$ est $\neg(F')$, etc.

Le passage au quantificateur existentiel est l'objet des points ci-dessous.

9°) Soit $F(x_1, ..., x_p, x_{p+1})$ une formule du langage (S, Pred, $=$, $\perp$) pour laquelle est déjà construite la formule équivalente F' de la forme indiquée en 6°). On cherche à construire $[\exists x_{p+1} F(x_1, ..., x_p, x_{p+1})]'$.

Utilisant 5°) pour les sous-formules $\mathrm{Pred}^k(x_i) = x_j$, $S^k(x_{p+1}) = x_j$ et $\mathrm{Pred}^k(x_{p+1}) = x_j$ de F', on voit que F', et donc aussi F, équivaut à une combinaison booléenne de formules du langage (S, Pred, $\perp$) et de formules des types $S^k(x_i) = x_j$, $S^k(x_i) = x_{p+1}$ et $\mathrm{Pred}^k(x_i) = x_{p+1}$, où $i \leqslant p$ et $j \leqslant p$.

Rappelons que toute combinaison booléenne de formules se ramène à une disjonction de conjonctions de ces formules et de leurs négations. D'autre part, toute conjonction $(t_1 = x_{p+1}) \wedge R(t_2, x_{p+1})$ équivaut à

$$(t_1 = x_{p+1}) \wedge R(t_2, t_1).$$

Enfin, toute conjonction $(t_1 \neq x_{p+1}) \wedge (t_2 \neq x_{p+1})$ équivaut à

$$[(t_1 \neq x_{p+1}) \wedge (t_1 = t_2)] \vee [(t_1 \neq x_{p+1}) \wedge (t_2 \neq x_{p+1}) \wedge (t_1 \neq t_2)].$$

Ceci montre que *la formule* F', et donc aussi F, *équivaut à la disjonction d'une famille de formules* $H_\alpha(x_1, ..., x_p) \wedge F_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1})$, $\alpha \in A$ (A *fini*),

où H_α *est une conjonction de formules* $S^k(x_i) = x_j, i \leqslant p, j \leqslant p,$ *et de leurs négations, et chacune des* F_α *est de l'une des deux formes suivantes:*

$$G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge [(s_\alpha = x_{p+1})]$$

ou $$G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge [\bigwedge_{u \in U_\alpha} (t_u \neq x_{p+1})] \wedge [\bigwedge_{u \in U_\alpha, v \in U_\alpha, u \neq v} (t_u \neq t_u)]$$

où G_α *est une formule du langage* $(S, \mathrm{Pred}, \perp)$, s_α *et* t_u *sont des termes de la forme* $S^k(x_i)$ *ou* $\mathrm{Pred}^k(x_i)$, *avec* $i \leqslant p$.

10°) Comme la quantification existentielle commute avec la disjonction, la formule $\exists x_{p+1} F$ équivaut à la disjonction des $\exists x_{p+1}(H_\alpha \wedge F_\alpha)$. La construction de $[\exists x_{p+1} F]'$ peut ainsi être ramenée à celle des $[\exists x_{p+1}(H_\alpha \wedge F_\alpha)]'$ (dont ce sera la disjonction).

Comme $H_\alpha(x_1, ..., x_p)$ ne dépend pas de x_{p+1}, la formule $\exists x_{p+1}(H_\alpha \wedge F_\alpha)$ équivaut à $H_\alpha(x_1, ..., x_p) \wedge \exists x_{p+1} F_\alpha$. La construction de $[\exists x_{p+1}(H_\alpha \wedge F_\alpha)]'$ peut ainsi être ramenée à celle de $[\exists x_{p+1} F_\alpha]'$ (dont ce sera la conjonction avec H_α).

11°) Le cas où F_α est de la forme $G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge [(s_\alpha = x_{p+1})]$ est trivial: la formule $\exists x_{p+1} F_\alpha$ équivaut alors à $G_\alpha(x_1, ..., x_p, s_\alpha)$, laquelle est de la forme demandée en 6°) et peut être prise pour $[\exists x_{p+1} F_\alpha]'$.

12°) Etudions maintenant le cas où F_α est de la forme

$$G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge [\bigwedge_{u \in U_\alpha} (t_u \neq x_{p+1})] \wedge [\bigwedge_{u \in U_\alpha, v \in U_\alpha, u \neq v} (t_u \neq t_u)]$$

D'après la Proposition 4.11 il existe une partie finie A de $\mathbf{Z}$ telle que la relation définie par la formule G_α soit $(\cong_A)$-saturée. La relation $\cong_A$ est évidemment définissable dans le langage $(S, \mathrm{Pred}, \perp)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, l'ensemble $\{x \in \mathbf{N}$: la classe de x pour $\cong_A$ contient exactement k éléments$\}$ est $(\cong_A)$-saturé. Le Théorème 4.10 assure donc qu'il est définissable par une formule, notée $EQ_k(x)$, du langage $(S, \mathrm{Pred}, \perp)$. Si X est un ensemble fini nous notons $|X|$ le nombre de ses éléments. On considère les formules θ, $\varphi_{u,X}$ et $\psi_{u,X}$ suivantes, où $u \in U_\alpha$ et $X \subseteq U_\alpha$:

$$\bigwedge_{v \in U_\alpha} (x_{p+1} \not\cong_A t_v), (x_{p+1} \cong_A t_u)] \wedge [\bigwedge_{v \in X} (t_v \cong_A t_u)] \wedge [\bigwedge_{w \notin X} (t_w \not\cong_A t_u)] \wedge EQ_{|X|}(t_u)$$

et

$$(x_{p+1} \cong_A t_u)] \wedge [\bigwedge_{v \in X} (t_v \cong_A t_u)] \wedge [\bigwedge_{w \notin X} (t_w \not\cong_A t_u)] \wedge \neg EQ_{|X|}(t_u).$$

La disjonction de ces formules, quand u varie dans U_α et X dans les parties de U_α, est une tautologie.

La construction de $[\exists x_{p+1} F_\alpha]'$ peut ainsi être ramenée à celle des $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \theta)]'$, $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \varphi_{u,X})]'$, $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \psi_{u,X})]'$ (dont ce sera la disjonction).

13°) On observe que les clauses $t_u \neq x_{p+1}$ de F_α sont trivialement impliquées par θ et peuvent donc être supprimées dans la formule $F_\alpha \wedge \theta$. Cette dernière équivaut donc à $G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge L_\alpha$ où L_α est la conjonction des $t_u \neq t_v$ (où ne figure pas x_{p+1}). Ainsi, $\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \theta)$ équivaut à $L_\alpha \wedge \exists x_{p+1} G_\alpha$. Il est clair que cette dernière formule est de la forme demandée en 6°) et peut être prise pour $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \theta)]'$.

14°) On observe que la formule $F_\alpha \wedge \varphi_{u,X}$ est toujours fausse car $\varphi_{u,X}$ implique que la classe de t_u pour $\cong_A$ est l'ensemble des t_v, $v \in X$, et donc que x_{p+1} est égal à l'un d'eux, ce qui contredit une des clauses de F_α. On peut donc prendre pour $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \varphi_{u,X})]'$ une formule comme $x_1 \neq x_1$.

15°) La relation définie par G_α étant $(\cong_A)$-saturée et $\psi_{u,X}$ impliquant $x_{p+1} \cong_A t_u$, les formules $G_\alpha(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \wedge \psi_{u,X}$ et $G_\alpha(x_1, ..., x_p, t_u) \wedge \psi_{u,X}$ sont équivalentes. Notons $\rho_{u,X}$ la conjonction des clauses $t_v \cong_A t_u$, $t_w \ncong_A t_u$ et $\neg EQ_{|X|}(t_u)$ de $\psi_{u,X}$ ($v \in X$ et $w \notin X$). Cette formule assure que la classe de t_u pour $\cong_A$ contient un élément z différent des t_v, $v \in X$. Un tel élément z est nécessairement également différent des t_w, $w \notin X$ (lesquels ne sont pas dans la classe de t_u). Ainsi, $\rho_{u,X}$ implique $\exists z[(z \cong_A t_u) \wedge \bigwedge_{v \in U_\alpha} (t_v \neq z)]$.

Observons que $F_\alpha \wedge \psi_{u,X}$ est équivalente à une formule de la forme

$$M_\alpha(x_1, ..., x_p) \wedge [(x_{p+1} \cong_A t_u)] \wedge \bigwedge_{v \in U_\alpha} (t_v \neq x_{p+1})],$$

où M_α, qui contient $\rho_{u,X}$, est la conjonction d'une formule du langage $(S, \mathrm{Pred}, \perp)$ et des $t_u \neq t_v$ (où ne figure pas x_{p+1}).

On voit donc que $\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \psi_{u,X})$ équivaut à $M_\alpha(x_1, ..., x_p)$, laquelle peut donc être prise pour $[\exists x_{p+1}(F_\alpha \wedge \psi_{u,X})]'$.

Fin de la preuve du Théorème 6.5.

6.6. Une application du Théorème 6.5 permet d'obtenir l'implication i) $\Rightarrow$ iii)ter du Théorème 4.8 (et ce, de façon tout à fait constructive).

COROLLAIRE. *Si* $+$ *et* $\times$ *sont définissables dans la structure* $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; =, \perp \rangle$ *alors l'égalité l'est dans* $\langle \mathbf{N}; S, \mathrm{Pred}; \perp \rangle$.

Preuve. Le Théorème 6.5 montre que si la relation d'ordre $x < y$ est définissable avec S, Pred, $=$ et $\perp$, elle l'est par une formule qui, mise sous forme de disjonction de conjonctions, a la forme suivante

$$\bigvee_{\alpha\in A} [F_\alpha(x, y) \wedge [\bigwedge_{i\in I_\alpha} (y\neq x+i)] \wedge [\bigwedge_{j\in J_\alpha} (x\neq y+j)] \wedge [\bigwedge_{k\in K_\alpha} (y=x+k)] \wedge [\bigwedge_{I\in L_\alpha} (x=y+1)]]$$

où F_α est une formule ne faisant pas intervenir l'égalité.

Si K_α ou L_α contient plus d'un élément alors la clause associée à α est impossible et peut donc être supprimée. Si L_α n'est pas vide ou si K_α contient 0 alors la clause associée à α contredit la condition $x < y$ et peut donc être supprimée. Si $K_\alpha = \{k\}, k \geqslant 1$, alors la sous-formule $y = x + k$ implique $x < y$; ainsi, la clause associée à α peut, toute entière, être remplacée par $y = x + k$.

Ceci permet de définir $x < y$ sous la forme suivante:

$$[\bigvee_{k\in K} y=x+k] \vee \bigvee_{\alpha\in A} [F_\alpha(x, y) \wedge [\bigwedge_{i\in I_\alpha} (y\neq x+i)] \wedge [\bigwedge_{j\in J_\alpha} (x\neq y+j)]].$$

Soit M le supremum des éléments des J_α.
Puisque la clause associée à α implique $x < y$, on voit que $F_\alpha(x, y)$ implique $(x<y) \vee [\bigvee_{i\in I_\alpha} (y=x+i)] \vee [\bigvee_{j\in J_\alpha} (x=y+j)]]$, qui implique aussi $x \leqslant y + M$.
Si $F(x, y)$ est la disjonction des $F_\alpha(x, y)$, on voit donc que

$$x < y \Rightarrow F(x, y) \Rightarrow x \leqslant y + M ,$$

d'où $x = y \Rightarrow F(x, y+1) \wedge F(y, x+1) \Rightarrow | x - y | \leqslant M + 1$.

Le point iii) du Théorème 2.11 permet alors de conclure que l'égalité $x = y$ est définie par la formule $F(x, y+1) \wedge F(y, x+1) \wedge E(x, y)$ où $E(x, y)$ est la formule, écrite avec S et $\perp$ qui définit la relation $x \cong_{\{0,\ldots,k\}} y$, où k est un premier supérieur à M.

§ 7. Définissabilité par successeur, coprimarité et résiduation quadratique

7.1. Désignons par RES et T les relations binaires

RES $= \{(x, p) \in \mathbf{N} \times P$: x est résidu quadratique modulo le premier $p\}$,

$T = \{(x, p) \in \mathbf{N} \times P$: x est impair et l'exposant (peut-être nul) du premier p dans la décomposition primaire de x est pair$\}$.

Le Théorème de Størmer (cf. Corollaire 2.5, point ii) se traduit par le lemme suivant: