Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 36 (1990), p. 39-51

GAUSS SUMS AND THEIR PRIME FACTORIZATION

by Jan BRINKHUIS

INTRODUCTION

The prime factorization of Gauss sums associated to a finite field of p elements, with p a prime number, plays a fundamental role in the theory of cyclotomic fields. Therefore it is desirable to have a proof which is as simple as possible. The usual proof, as given for example by Weil in [W], proceeds by determining the leading term of the local expansion of such a Gauss sum in each completion above p of the appropriate cyclotomic field. This requires some relatively delicate manipulations with binomial coefficients. The new proof which is offered in the present paper avoids this completely: instead we proceed by deriving the prime factorization as a formal consequence of four basic properties of Gauss sums (they are listed in proposition (1.2)). The resulting proof is very easy to memorize, in fact it is probably the simplest possible one. The novel idea which gives rise to the simplification is a general, almost trivial observation on inertia groups, which sometimes leads to an effortless determination of discrete valuations modulo a specific positive integer (see lemma (4.3) and the discussion following it).

It seemed appropriate to include also an introduction to one of the main applications of the prime factorization of Gauss sums, the annihilation of ideal class groups by Stickelberger ideals. In our presentation of this application, we let the annihilator ideal of a group of roots of unity play a central role.

1. GAUSS SUMS AND SOME OF THEIR PROPERTIES

Let $\mathbf{Z}$ be the ring of rational integers, $\mathbf{Q}$ the field of rational numbers and $\bar{\mathbf{Q}}$ an algebraic closure of $\mathbf{Q}$ chosen once and for all. Subfields F of $\bar{\mathbf{Q}}$ of finite degree over $\mathbf{Q}$ are called algebraic number fields. For each