2. Plan de démonstration du théorème 1.3 et notations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Plan de démonstration du théorème 1.3 et notations

Cette démonstration, qui est la partie la plus importante de l'article, occupe les §§3 à 8. Nous nous y placerons hors du cas trivial où $A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Au §3, nous rendons compte comme suit de l'«isotopie» dont il est question dans l'introduction (cette construction est déjà faite dans [Ch1] et nous y renverrons pour plusieurs démonstrations): Nous faisons éclater $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe $\mathscr{M}$ de façon à répéter celui-ci autant de fois qu'il y a d'éléments dans le pinceau Λ (cf. fig. 3.1). Nous construisons ensuite une stratification de Whitney $\tilde{\mathfrak{S}}$ de l'éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ avec les propriétés suivantes: le complémentaire $\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}$ de la transformée totale $\tilde{A}$ de A est une strate de $\tilde{\mathfrak{S}}$ et la transformée totale de toute strate de $\mathfrak{S}$ est union de strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$; la transformée totale $\tilde{\mathscr{M}}$ de l'axe $\mathscr{M}$ est aussi union de strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$; les transformées strictes de tous les éléments de Λ sont transverses dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à toutes les strates de $\tilde{\mathfrak{S}}$ à l'exception des transformées strictes $\mathscr{L}_1^\#, \ldots, \mathscr{L}_s^\#$ des hyperplans «mauvais». La possibilité de cette construction est donnée par la transversalité de $\mathscr{M}$ aux strates de $\mathfrak{S}$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Le *premier théorème d'isotopie de Thom-Mather* (cf. [Th2] et [Ma]) nous permet alors de conclure que si l'on ôte $\mathscr{L}_1^\#, \ldots, \mathscr{L}_s^\#$ à $\tilde{\mathbf{P}}^n$, on obtient un fibré localement trivial topologique $\tilde{\mathbf{P}}^n_*$ respectant $\tilde{\mathfrak{S}}$, dont la base $\mathbf{P}^1_* = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ représente les directions des «bons» hyperplans de Λ, et dont la fibre type est la transformée stricte $\mathscr{L}^\#$ de $\mathscr{L}$ stratifiée par la trace de $\tilde{\mathfrak{S}}$; cette fibre est isomorphe à $\mathscr{L}$ stratifié par un raffinement de la trace de $\mathfrak{S}$. Cela donne un sens précis à l'assertion d'«isotopie» de l'introduction.

Dans la suite de la démonstration, nous utilisons seulement une forme appauvrie de ce résultat, ne concernant que le complémentaire de $\tilde{A}$, à savoir que

$$\tilde{P}_* = (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \backslash (\mathscr{L}_1^\# \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^\#)$$

et

$$\tilde{M}_* = \tilde{\mathscr{M}} \cap ((\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \backslash (\mathscr{L}_1^\# \cup \ldots \cup \mathscr{L}_s^\#))$$

sont des fibrés localement triviaux topologiques sur la même base $\mathbf{P}^1_*$ avec pour fibres types respectives

$$L^\# = \mathscr{L}^\# \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}) \quad \text{et} \quad M^\# = \tilde{\mathscr{M}} \cap (\mathscr{L}^\# \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}))\ ;$$

celles-ci sont respectivement homéomorphes à $L = \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$ et $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$, sections considérées dans l'énoncé du théorème 1.3 (cf. fig. 3.2).

Mais aussi, d'après la fibration stratifiée dont nous sommes partis, $\tilde{M}_*$ est un *sous-fibré* de $\tilde{P}_*$, c'est-à-dire qu'il existe des trivialisations locales

de $\tilde{P}_*$ donnant par restriction des trivialisations locales de $\tilde{M}_*$. D'autre part, le sous-fibré $\tilde{M}_*$ a la forme triviale $M \times \mathbf{P}^1_*$, première manifestation de trivialité due à la structure de produit $\tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la transformée totale de l'axe du pinceau Λ.

A partir du §4 nous nous limitons à une étude homologique.

Au §4, nous étudions l'homologie du couple de fibrés $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$. Leur base se rétractant par déformation sur un bouquet de $s-1$ cercles, nous nous ramenons à des fibrés sur un cercle. Pour ceux-ci, on dispose de l'*isomorphisme de Wang* (cf. [Wg]) qui caractérise les k-cycles relatifs de l'espace total modulo la fibre comme étant à homologie près «décrits» par les $(k-1)$-cycles de la fibre au cours d'une monodromie (cf. fig. 4.1). Nous obtenons ainsi une expression de $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ à l'aide de $H_{k-1}(L^{\#})$, donc de $H_{k-1}(L)$, et des monodromies autour des transformées strictes des hyperplans mauvais.

L'isomorphisme de Wang se comportant naturellement par rapport aux sous-fibrés, cette expression de $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ se comporte naturellement par rapport à l'expression analogue pour $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$. D'autre part, les monodromies pour le fibré trivial $\tilde{M}_*$ étant triviales, on est ramené dans ce dernier cas à des produits-croix par des générateurs de $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ et l'expression pour $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$ se réduit à la formule de Künneth pour un couple de produits. Signalons que notre expression pour $H_k(\tilde{P}_*, L^{\#})$ dépend du bouquet de cercles sur lequel on rétracte $\mathbf{P}^1_*$ (contrairement à celle pour $H_k(\tilde{M}_*, M^{\#})$).

En utilisant alors la suite exacte d'homologie relative, nous obtenons des suites exactes pour les fibrés $\tilde{P}_*$ et $\tilde{M}_*$ reliant l'homologie de leur espace total aux homologies de leur fibre et de leur base. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et la suite exacte pour $\tilde{M}_*$ n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1_*$.

Au §5, nous étudions l'incidence en homologie de la réintroduction des transformées strictes $\mathscr{L}_1^{\#}, \ldots, \mathscr{L}_s^{\#}$ des hyperplans mauvais. Nous nous limitons au complémentaire de $\tilde{A}$ donc au passage de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P} = \tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A}$ et de $\tilde{M}_*$ à $\tilde{M} = \tilde{\mathscr{M}} \cap (\tilde{\mathbf{P}}^n \backslash \tilde{A})$. On passe de $\tilde{P}_*$ à $\tilde{P}$ en rajoutant les ensembles $L_i^{\#} = \mathscr{L}_i^{\#} \cap \tilde{P}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ qui sont isomorphes aux $L_i = \mathscr{L}_i \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$, autres sections considérées dans l'énoncé du théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). On passe de $\tilde{M}_*$ à $\tilde{M}$ en rajoutant, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, les ensembles $M_i^{\#} = \tilde{\mathscr{M}} \cap L_i^{\#}$ qui sont tous isomorphes à la section $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A)$. Nous cherchons à caractériser $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ à partir de cela.

Par excisions, nous nous ramenons à la réintroduction d'une seule transformée stricte d'hyperplan mauvais, c'est-à-dire à l'étude des $H_k(\tilde{P}_i, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}_i, \tilde{M}_*)$ avec $\tilde{P}_i = \tilde{P}_* \cup L_i^\#$ et $\tilde{M}_i = \tilde{M}_* \cup M_i^\#$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Ces couples sont de la forme $(\tilde{P}_i, \tilde{P}_i \backslash L_i^\#)$ et $(\tilde{M}_i, \tilde{M}_i \backslash M_i^\#)$, où $\tilde{P}_i$ et $\tilde{M}_i$ sont des variétés analytiques complexes séparées paracompactes et $L_i^\#$ et $M_i^\#$ sont des sous-variétés fermées respectives de codimension complexe pure 1. Dans ces conditions on dispose de l'*isomorphisme de Leray* (cf. [Lr]) selon lequel les k-cycles de $\tilde{P}_i$ sont obtenus à homologie près en «faisant épaissir» les $(k-2)$-cycles de $L_i^\#$ de manière cohérente avec les orientations canoniques (cf. fig. 5.1); de même pour $\tilde{M}_i$ et $M_i^\#$. Nous obtenons ainsi que $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ est isomorphe à la somme directe des $H_{k-2}(L_i^\#)$ donc des $H_{k-2}(L_i)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ à la somme directe des $H_{k-2}(M_i^\#)$ donc à la puissance s-ième de $H_{k-2}(M)$.

Mais $\tilde{M}_i$ est une sous-variété fermée de $\tilde{P}_i$ transverse à $L_i^\#$ et la trace de $L_i^\#$ sur $\tilde{M}_i$ est $M_i^\#$. L'isomorphisme de Leray se comportant naturellement dans ces conditions, les isomorphismes pour $H_k(\tilde{P}, \tilde{P}_*)$ et $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ commutent aux homomorphismes naturels. D'autre part, le couple $(\tilde{M}_i, M_i^\#)$ ayant la forme triviale $(M \times \mathbf{P}_i^1, M \times \{\lambda_i\})$ avec $\mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}_*^1 \cup \{\lambda_i\}$, l'«épaississement» d'un $(k-2)$-cycle de $M_i^\#$ peut se faire trivialement comme un produit-croix par un 2-cycle relatif de $\mathbf{P}_i^1$ modulo $\mathbf{P}_*^1$ entourant λ_i. L'isomorphisme pour $H_k(\tilde{M}, \tilde{M}_*)$ se réduit alors à la formule de Künneth pour le couple de produits $(M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), M \times \mathbf{P}_*^1)$.

Utilisant alors la suite exacte d'homologie relative, nous obtenons deux suites exactes reliant l'une l'homologie de $\tilde{P}$ à celles de $\tilde{P}_*$ et des L_i, l'autre l'homologie de $\tilde{M}$ à celles de $\tilde{M}_*$ et de M. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et les homomorphismes intervenant dans la suite exacte pour $\tilde{M}$ peuvent être exprimés à l'aide de produits-croix.

Au § 6, nous examinons le retour de l'éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à l'espace initial $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement. Nous nous limitons là aussi à une étude homologique de ce qui se passe en dehors de $\tilde{A}$ et A. Avec les notations ci-dessus (cf. aussi fig. 3.2), nous avons déjà vu que $L^\#, L_1^\#, \ldots, L_s^\#$ sont respectivement isomorphes à $L, L_1, \ldots, L_s$, et que $M^\#, M_1^\#, \ldots, M_s^\#$ sont tous isomorphes à M, informations qui ont été intégrées dans les résultats des deux paragraphes précédents. Il reste à étudier le passage de $\tilde{P}$ à $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \backslash A$ et de $\tilde{M}$ à M. Mais $\tilde{P} \backslash \tilde{M}$ est isomorphe à $P \backslash M$ et le passage de $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à M relève de la formule de Künneth. Nous énonçons qu'en fait il ne se passe rien de plus dans le passage de $\tilde{P}$ à P: tout k-cycle de P est

homologue à un cycle qui peut être «relevé» en un k-cycle de $\tilde{P}$ et les seuls k-cycles de $\tilde{P}$ qui se «dégonflent» dans la descente à P sont ceux qui sont homologues dans $\tilde{P}$ au produit-croix d'un $(k-2)$-cycle quelconque de M avec un 2-cycle fondamental de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (cf. fig. 6.1). Nous renvoyons à [Ch2] pour la démonstration de ce résultat.

Nous obtenons ainsi deux suites exactes courtes scindées reliant, l'une, $H_k(\tilde{P})$ à $H_k(P)$ et $H_{k-2}(M)$ et l'autre, $H_k(\tilde{M})$ à $H_k(M)$ et $H_{k-2}(M)$. Ces deux suites sont réunies en un diagramme commutatif par les homomorphismes naturels et la suite exacte pour $\tilde{M}$ n'est qu'une version de la formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Les §§3 à 6 posent le cadre géométrique général permettant de démontrer le théorème 1.3. Avec les notations ci-dessus (cf. aussi fig. 3.2), ils permettent en effet de comparer successivement l'homologie de $L = \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$ à celle de $\tilde{P}_*$, celle de $\tilde{P}_*$ à celle de $\tilde{P}$, et celle de $\tilde{P}$ à celle de $P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$; ils le font en connexion naturelle avec les comparaisons analogues pour $M = \mathscr{M} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$, $\tilde{M}_*$, $\tilde{M}$ et à nouveau M qui, elles, ont lieu trivialement en raison de la structure de produit de $\tilde{\mathscr{M}}$. C'est la naturalité et la trivialité, à chaque étape, de ce qui se passe dans la transformée totale de l'axe qui nous permettra de «trivialiser» tout ce qui peut être «poussé» dans l'axe. Notons que ce cadre pourrait aussi servir à aborder d'autres problèmes que ceux visés par le théorème 1.3 (par exemple un «second théorème de Lefschetz»: cf. (12.3)). Nous n'utilisons d'ailleurs jusque-là aucune des hypothèses sur la comparaison entre l'homologie de M et celles de L et des L_i qui sont formulées au moment de la conclusion du théorème 1.3.

Au §7, utilisant le chemin que nous avons indiqué, nous introduisons progressivement et le plus économiquement possible de telles hypothèses de manière à pouvoir aboutir à la conclusion de surjectivité du théorème 1.3.

Au §8, nous faisons le même travail en vue de la conclusion d'injectivité du théorème.

Nous avons renvoyé en annexe des indications sommaires mais toutefois longues sur la manière dont on peut établir les isomorphismes de Wang et de Leray dont nous nous servons aux §§4 et 5 et aussi justifier leurs propriétés de naturalité et de réduction à un produit-croix dans le cas trivial.

Les notations utilisées dans les §§3 à 8 pour la démonstration du théorème 1.3 et dont l'esquisse qui précède montre qu'elles sont indispensables pour alléger l'écriture, sont malheureusement nombreuses. Mais on les trouve, pour l'essentiel, définies de manière groupée de (3.1) à (3.8), de (3.15) à (3.19) et de (3.23) à (3.28) d'une part, et dans les propositions terminales des §§4,

5 et 6 d'autre part. On peut aussi en avoir une vue d'ensemble rapide grâce à la figure 3.2. D'autres notations, utiles seulement pour les besoins d'un paragraphe sont introduites au cours de ceux-ci.

Nous utiliserons, pour la durée de la démonstration du théorème 1.3 au long des §§3 à 8, la convention d'écriture suivante:

(2.1) L'apposition d'un indice k à une lettre latine désignant une application continue signifiera qu'on considère l'homomorphisme induit par cette application entre les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers de rang k.

Les notations de l'énoncé du théorème 1.3 sont déjà cohérentes avec cette convention; par exemple, l'homomorphisme induit en homologie de rang k par l'injection canonique $l\colon \mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ y est noté $l_k\colon H_k(\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)) \to H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A)$.

Pour faire place aux indices inférieurs utilisés dans le cadre de la convention (2.1), nous avons dû parfois mettre en position supérieure d'autres indices qu'il aurait été autrement plus naturel de mettre en position inférieure. C'est par exemple le cas de l'indice i dans les homomorphismes m_k^i du théorème 1.3.

Pour éviter toute confusion, nous utiliserons des lettres indexées *grecques* pour désigner des homomorphismes entre groupes d'homologie qui ne sont pas induits par une application. Ce sera par exemple le cas pour certains homomorphismes bord et pour les homomorphismes notés $\bar{\nu}_k$ et τ_k aux paragraphes 4 et 5 qui désigneront des isomorphismes dérivés de ceux de Wang et de Leray.

Tous les groupes d'homologie considérés dans cet article sont des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers. Les seules topologies considérées sont les topologies ordinaires.

3. Eclatement stratifié et fibration hors des hyperplans mauvais

Dans ce paragraphe, nous précisons et justifions l'assertion d'«isotopie» de l'introduction. On pense évidemment à une fibration localement triviale stratifiée dont les bons hyperplans du pinceau seraient les fibres. Mais on veut donc enlever $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_s$ tout en conservant l'axe $\mathscr{M}$ dans chaque fibre: un moyen d'y parvenir est de «répéter» $\mathscr{M}$ autant de fois qu'il y a de directions d'hyperplan dans le pinceau Λ. Cela est précisément réalisé par un éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de $\mathscr{M}$. Cette idée apparaît déjà sous une autre forme dans [Wa]; on la trouve ensuite sous la forme présente dans [A-F2] et elle est reprise