Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

Kapitel: 8. Assertion d'injectivité du théorème 1.3

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ce qui, compte tenu de l'égalité $\operatorname{Im} \eta_k = \operatorname{Ker} \zeta_k$, donne la relation (7.8.4) à laquelle nous nous étions ramenés. $\square$

Les lemmes 7.3, 7.5, 7.6 et 7.8 démontrent l'assertion de surjectivité du théorème 1.3.

8. Assertion d'injectivité du théorème 1.3

Dans ce paragraphe, nous faisons le même travail qu'au § 7, mais en vue de la conclusion d'injectivité du théorème 1.3 concernant l'homomorphisme l_k induit en homologie de rang k par l'inclusion $l: L \hookrightarrow P$ (cf. fig. 3.2). Comme au § 7, les seuls éléments dont nous aurons besoin seront (outre le lemme élémentaire 7.7) le diagramme commutatif (7.1), la proposition 4.23, le corollaire 5.20 et le corollaire 6.9. Du moins en serait-il ainsi si, comme dernière condition pour l'injectivité de l_k, nous nous contentions de celle donnée par le lemme 8.6. Nous parviendrons à l'affaiblir en celle du lemme 8.7 en utilisant aussi le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29).

Nous nous servons toujours du diagramme commutatif (7.2), conséquence de (7.1), que nous rappelons:

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow j_k & & \downarrow f_k \\ H_k(L) & \xrightarrow{l_k} & H_k(P) \end{array} \tag{8.1}$$

Nous avons, pour l'injectivité de l_k, le lemme suivant:

Lemme 8.2. *Pour que l_k soit injectif pour un k donné, il faut et il suffit que:*

(i) j_k *soit injectif;*

(ii) $\operatorname{Ker} i_k \cap \operatorname{Im} j_k = \{0\}$;

(iii) $\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im}(i_k \circ j_k) = \{0\}$.

Démonstration. On utilise cette fois le lemme algébrique suivant:

Lemme 8.3. *Soit $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ une suite de modules et d'homomorphismes. Pour que $v \circ u$ soit injectif, il faut et il suffit que u soit injectif et que* $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Démonstration. Laissée au lecteur. □

Pour en déduire le lemme 8.2, on applique le lemme 8.3 successivement avec $u = i_k \circ j_k$ et $v = f_k$ puis avec $u = j_k$ et $v = i_k$. □ □

Nous cherchons maintenant des conditions suffisantes pour que les conditions du lemme 8.2 soient satisfaites.

LEMME 8.4. *Pour que la condition (i) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que m_k soit surjectif.*

Démonstration. Elle utilise la partie suivante du diagramme de la proposition 4.23:

$$\begin{array}{ccccc} H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{\xi_{k+1}} & H_k(L) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{P}_*) \\ \uparrow m_k \otimes \mathrm{Id} & \circlearrowleft & \uparrow m_k & & \\ H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) & \xrightarrow{0} & H_k(M) & & \end{array} \tag{8.4.1}$$

Soit $z \in \operatorname{Ker} j_k$. D'après l'exactitude de la ligne supérieure de (8.4.1) donnée par la proposition 4.23, on a $z = \xi_{k+1}(y)$ avec $y \in H_k(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$. *Si m_k est surjectif,* il en est de même de $m_k \otimes \mathrm{Id}$ et on a $y = (m_k \otimes \mathrm{Id})\,(y')$ avec $y' \in H_k(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*)$. La commutativité de (8.4.1) donne alors

$$z = (\xi_{k+1} \circ (m_k \otimes \mathrm{Id}))\,(y') = (m_k \circ 0)\,(y') = 0\,,$$

ce qui implique que j_k est injectif. □

LEMME 8.5. *Pour que la condition (ii) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que m^i_{k-1} soit surjectif pour $1 \leqslant i \leqslant s$ et que m_{k-1} soit injectif.*

Démonstration. On se sert des parties suivantes des diagrammes du corollaire 5.20 et de la proposition 4.23:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-1}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_{k+1}} & H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) \\ \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-1} & \circlearrowleft & \uparrow h^*_k & & \\ \oplus^s H_{k-1}(M) & \xrightarrow{\zeta'_{k+1}} & H_k(\tilde{M}_*) & & \end{array} \tag{8.5.1}$$

$$\begin{tikzcd}
H_k(L) \arrow[r, "j_k"] & H_k(\tilde{P}_*) \arrow[r, "\mu_k"] & H_{k-1}(L) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \\
 & H_k(\tilde{M}_*) \arrow[u, "h_k^*"] \arrow[r, "\mu'_k"] \arrow[rr, bend right, "\chi'_k"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H_{k-1}(M) \otimes H_1(\mathbf{P}^1_*) \arrow[u, "m_{k-1} \otimes \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd} \tag{8.5.2}$$

D'après l'exactitude des lignes supérieures de ces diagrammes, on a

$$\operatorname{Ker} i_k = \operatorname{Im} \zeta_{k+1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} j_k = \operatorname{Ker} \mu_k .$$

On est donc ramené à montrer que

$$\operatorname{Im} \zeta_{k+1} \cap \operatorname{Ker} \mu_k = \{0\} . \tag{8.5.3}$$

Soit donc $z \in \operatorname{Im} \zeta_{k+1} \cap \operatorname{Ker} \mu_k$. Utilisons d'abord le fait que z appartienne à l'image de ζ_{k+1}. On a

$$z = \zeta_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} y_i\Big) \quad \text{avec} \quad y_i \in H_{k-1}(L_i) .$$

Cela nous amène à introduire notre première hypothèse:

Supposons que m^i_{k-1} *soit surjectif pour tout* i.

Alors

$$z = \zeta_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-1}(y'_i)\Big) \quad \text{avec} \quad y'_i \in H_{k-1}(M)$$

et, d'après la commutativité de (8.5.1) et la formule (5.20.2) du corollaire 5.20, on a

$$z = h_k^*\Big(\zeta'_{k+1}\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} y'_i\Big)\Big) = h_k^*\Big((-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i\Big)$$

avec les $\bar{w}_i$ définis dans le corollaire 5.20. Utilisons maintenant le fait que z appartienne au noyau de μ_k. On a

$$0 = \mu_k((-1)^{k+1} z) = (\mu_k \circ h_k^*)\Big(\sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i\Big) .$$

Comme le produit-croix χ'_k est une section de μ'_k d'après la proposition 4.23, on trouve, compte tenu de la commutativité de (8.5.2):

$$0 = (\mu_k \circ h_k^* \circ \chi'_k)\Big(\sum_{i=1}^{s} y'_i \otimes \partial \bar{w}_i\Big) = \sum_{i=1}^{s} m_{k-1}(y'_i) \otimes \partial \bar{w}_i .$$

Mais, d'après le lemme 7.7, cela implique que $m_{k-1}(y'_1) = \ldots = m_{k-1}(y'_s)$.

Supposons de plus que m_{k-1} *soit injectif.*

Les égalités ci-dessus donnent alors $y'_1 = \ldots = y'_s$ et, dans ces conditions,

$$\sum_{i=1}^{s} y'_i \times \partial \bar{w}_i = y'_1 \times \sum_{i=1}^{s} \partial \bar{w}_i = 0$$

d'après l'assertion (i) du lemme 7.7. On a donc $z = 0$, ce qui établit la relation (8.5.3) à laquelle nous nous étions ramenés. $\square$

Il nous reste à satisfaire à la condition (iii) du lemme 8.2. Nous commençons par chercher à satisfaire à une condition plus forte mais plus simple:

LEMME 8.6. *Pour que* $\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im} i_k = \{0\}$, il suffit qu'on ait $\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^i_{k-2} = \{0\}$.

Démonstration. Nous nous servons des portions suivantes des diagrammes des corollaires 6.9 et 5.20:

$$\begin{array}{ccccc} H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) \\ \uparrow \mathrm{Id} & \circlearrowleft & \uparrow h_k & & \\ H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & & \end{array} \tag{8.6.1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(\tilde{P}_*) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{\eta_k} & \bigoplus_{i=1}^{s} H_{k-2}(L_i) & \xrightarrow{\zeta_k} & H_{k-1}(\tilde{P}_*) \\ \uparrow h_k & & \circlearrowleft & & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2} & \circlearrowleft & \uparrow h^*_{k-1} \\ H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{\eta'_k} & & & \oplus^s H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\zeta'_k} & H_{k-1}(\tilde{M}_*) \end{array} \tag{8.6.2}$$

D'après l'exactitude des lignes supérieures de ces diagrammes, on a $\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} \sigma_k$ et $\operatorname{Im} i_k = \operatorname{Ker} \eta_k$ et nous sommes ramenés à montrer que:

$$\operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Ker} \eta_k = \{0\} . \tag{8.6.3}$$

Soit donc $z \in \operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Ker} \eta_k$. Comme, d'une part, $z \in \operatorname{Im} \sigma_k$, on a, d'après la commutativité de (8.6.1) et la définition de σ'_k contenue dans le corollaire 6.9,

$$z = h_k(\sigma'_k(y')) = h_k(y' \times w) \quad \text{avec} \quad y' \in H_{k-2}(M) ,$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Comme, d'autre part, $z \in \operatorname{Ker} \eta_k$, on a aussi

$$0 = \eta_k(z) = \eta_k(h_k(y' \times w)) = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(\eta'_k(y' \times w))$$

d'après la commutativité de (8.6.2). Mais la formule (5.20.3) du corollaire 5.20 donne alors

$$0 = (\bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2})\,(\oplus^s y') = \bigoplus_{i=1}^{s} m^i_{k-2}(y') ,$$

donc

$$m^i_{k-2}(y') = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s .$$

Si alors $\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m_{k-2}^{i} = \{0\}$, on a forcément $y' = 0$ donc $z = 0$. Cette condition sur les noyaux implique donc la relation (8.6.3) à laquelle nous nous sommes ramenés. □

Nous en déduisons une condition suffisante légèrement plus faible pour que la condition (iii) du lemme 8.2 soit satisfaite:

LEMME 8.7. *Pour que la condition (iii) du lemme 8.2 soit satisfaite pour un k donné, il suffit que*

$$\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{1} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{s} = \{0\} .$$

Démonstration. Dans tout ce que nous avons fait jusqu'ici, le fait que les hyperplans «mauvais» de l'énoncé du théorème 1.3 soient vraiment «mauvais» n'est pas intervenu, conformément à ce que nous avions annoncé dans l'introduction. Le lemme 8.6 reste donc vrai si l'on ajoute aux hyperplans «mauvais» $\mathscr{L}_i$ un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ de Λ transverse à toutes les strates de la stratification $\mathfrak{S}$ et distinct de $\mathscr{L}$ et des $\mathscr{L}_i$. Alors (cf. fig. 3.2), $\tilde{P}_*$ est remplacé par

$$\tilde{P}_{**} = \tilde{P} \backslash (L_1^{\#} \cup \ldots \cup L_s^{\#} \cup L_\infty^{\#}) = \tilde{P}_* \backslash L_\infty^{\#} ,$$

en notant les objets en rapport avec $\mathscr{L}_\infty$ de la même manière que ceux en rapport avec les $\mathscr{L}_i$, c'est-à-dire suivant (3.8), (3.15), (3.23) et (3.25) mais avec $i = \infty$. Et l'inclusion $i: \tilde{P}_* \hookrightarrow \tilde{P}$ est remplacée par l'inclusion $i^*: \tilde{P}_{**} \hookrightarrow \tilde{P}$.

Le lemme 8.6 appliqué à cette nouvelle situation donne donc une condition suffisante pour avoir, pour un k donné,

$$\operatorname{Ker} f_k \cap \operatorname{Im} i_k^* = \{0\} \tag{8.7.1}$$

et cette condition est

$$\operatorname{Ker} m_{k-2}^{\infty} \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{1} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} m_{k-2}^{s} = \{0\} , \tag{8.7.2}$$

où $m^\infty: M \hookrightarrow L_\infty$ est notée de manière analogue aux inclusions $m^i: M \hookrightarrow L_i$ du théorème 1.3 et où l'on a utilisé la convention d'écriture (2.1) pour les homomorphismes induits en homologie. Mais comme $L^{\#} \subset \tilde{P}_{**}$, on a $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) \subset \operatorname{Im} i_k^*$ et donc la relation (8.7.1) implique la condition (iii) du lemme 8.2. Le lemme 8.7 sera donc établi si nous montrons que

$$\operatorname{Ker} m_l^{\infty} = \operatorname{Ker} m_l \quad \text{pour tout} \quad l . \tag{8.7.3}$$

Or, d'après le corollaire 3.30 et les isomorphismes (3.29), le couple (L_∞, M) est homéomorphe au couple (L, M). En fait, la remarque 3.22 concernant la possibilité d'avoir une isotopie de $\mathscr{L}^{\#}$ respectant $\tilde{A}$ et triviale sur $\mathscr{M} \times \mathbf{P}_*^1$, montre que cet homéomorphisme pourrait même être pris de manière à coïncider avec l'identité sur M, ce qui donnerait directement l'égalité (8.7.3). Mais nous pouvons aussi établir (8.7.3) sans nous servir de cette remarque qui n'a été que sommairement justifiée; nous utilisons pour cela une façon de faire que nous reprendrons en annexe pour justifier l'isomorphisme de Wang et ses propriétés:

L'homéomorphisme de (L, M) sur (L_∞, M) provient, par les isomorphismes (3.29), d'un homéomorphisme de $(L^{\#}, M^{\#})$ sur $(L_\infty^{\#}, M_\infty^{\#})$. Or ce dernier peut être pris comme aboutisse-

ment d'une isotopie: Soit, en effet $\alpha: [0, 1] \to \mathbf{P}^1_*$ un arc *simple* joignant λ à λ_∞. Le couple $(\tilde{P}_*, \tilde{M}_*)$ étant formé d'un fibré localement trivial sur $\mathbf{P}^1_*$ et d'un sous-fibré, il induit sur $\alpha([0, 1])$, qui est homéomorphe à $[0, 1]$, un couple de fibrés admettant une trivialisation *globale* simultanée (cf. [Go] IX.1.1 qu'on peut adapter au cas d'un couple de fibrés). D'une telle trivialisation on déduit une isotopie $G: L^\# \times [0, 1] \to \tilde{P}_*$ de la fibre $L^\# = \tilde{p}_*^{-1}(\lambda)$ de $\tilde{P}_*$ telle que

(i) $\tilde{p}_*(G(x, t)) = \alpha(t)$ pour tous $x \in L^\#$ et $t \in [0, 1]$

(ii) $G(x, 0) = x$ pour tout $x \in L^\#$

(iii) G est un homéomorphisme de $L^\# \times [0, 1]$ sur $\tilde{p}_*^{-1}(\alpha([0, 1]))$

(iv) $G(M^\# \times [0, 1]) = \tilde{M}_* \cap \tilde{p}_*^{-1}(\alpha([0, 1]))$.

L'aboutissement

$$\begin{aligned} g^\#: L^\# &\to L^\#_\infty \\ x &\mapsto G(x, 1) \end{aligned}$$

d'une telle isotopie est bien un homéomorphisme du couple $(L^\#, M^\#)$ sur le couple $(L^\#_\infty, M^\#_\infty)$. De plus, cet homéomorphisme induit, par restriction, un homéomorphisme $g'^\#: M^\# \to M^\#_\infty$ qui est l'aboutissement d'une isotopie $G': M^\# \times [0, 1] \to \tilde{M}_*$ obtenue par restriction de G et possédant les propriétés analogues aux propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Mais comme $\tilde{M}_*$ est trivial avec $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}^1_*$ et $M^\# = M \times \{\lambda\}$ et que la restriction de $\tilde{p}_*$ à $\tilde{M}_*$ coïncide avec la deuxième projection, on a aussi l'isotopie triviale

$$\begin{aligned} G'': M^\# \times [0, 1] &\to M_* \\ ((v, \lambda), t) &\mapsto (v, \alpha(t)) \end{aligned}$$

qui vérifie également les propriétés (i) à (iii). Or la propriété de relèvement des homotopies que possède un fibré trivial a pour corollaire, compte tenu de ce que G' et G'' vérifient (i) et (ii), l'existence d'une homotopie

$$H: M^\# \times [0, 1] \times [0, 1] \to \tilde{M}_*$$

de G' vers G'' telle que

$$H(y, 0, t') = y \quad \text{et} \quad \tilde{p}_*(H(y, t, t')) = \alpha(t) \quad \text{pour} \quad y \in M^\# \quad \text{et} \quad t, t' \in [0, 1]$$

(cf. [Sp] 2.8.10). Alors l'application

$$\begin{aligned} M^\# \times [0, 1] &\to M^\#_\infty \\ (y, t') &\mapsto H(y, 1, t') \end{aligned}$$

est une homotopie de $g'^\#$ vers l'identification canonique

$$\begin{aligned} M^\# &\to M^\#_\infty \\ (v, \lambda) &\mapsto (v, \lambda_\infty) . \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la transmuée $g: L \to L_\infty$ de $g^\#$ par les isomorphismes (3.29) réalise bien un homéomorphisme du couple (L, M) sur le couple (L_∞, M), mais aussi, l'homéomorphisme $g': M \to M$ qu'elle induit étant la transmuée de $g'^\#$, est homotope dans M à l'identité de M. Alors, même si l'on ignore que g' peut être prise *égale* à l'identité, on sait du moins qu'elle induit l'identité en homologie et l'égalité (8.7.3) en résulte. Cela termine la démonstration du lemme 8.7. □

Les lemmes 8.2, 8.4, 8.5 et 8.7 démontrent l'assertion d'injectivité du théorème 1.3.

L'assertion de surjectivité ayant été prouvée au terme du § 7, le théorème 1.3 se trouve donc démontré. Y compris, remarquons-le, l'assertion selon laquelle il est possible de considérer artificiellement comme «mauvais» des hyperplans de Λ qui sont en fait «bons». Nulle part, en effet, dans la démonstration qui précède, nous n'avons fait intervenir le fait que les hyperplans «mauvais» fussent vraiment «mauvais». □ □

9. Démonstration du théorème 1.1 et du corollaire 1.2

1°. Démonstration du théorème 1.1 à partir du théorème 1.3

Pour montrer les assertions du théorème 1.1, le théorème 1.3 va nous permettre une récurrence qui nous ramènera à une situation en basse dimension où un calcul direct est possible. On pense naturellement à une récurrence sur la dimension n de l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Mais cela n'est pas commode car nous verrons que, dans l'étape de récurrence où nous utilisons les sections par un pinceau d'hyperplans comme dans le théorème 1.3, la codimension de A peut diminuer dans les sections exceptionnelles si l'on ne suppose pas que $\dim A \geqslant 1$. Nous ferons donc une récurrence sur $d = \dim A$ amorcée à $d = 0$ avec n donc q quelconques. Nous écarterons le cas trivial où $A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire $q = 0$.

Pour commencer, le cas où A est vide, pour lequel nous avons convenu que $q = n + 1$, correspond donc à $d = -1$ et se trouve hors récurrence. Dans ce cas, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}$. Or, à homéomorphisme près, $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ peut être obtenu en attachant à $\mathscr{L}$ une $2n$-boule fermée B^{2n} le long de la $(2n-1)$-sphère S^{2n-1} formant son bord. On a donc

$$H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathscr{L}) = H_k(B^{2n}, S^{2n-1}) = 0 \quad \text{pour} \quad k \leqslant 2n - 1$$

(cf. [Gb] chap. 19). Comme dans ce cas $n + q - 2 = 2n - 1$, les conclusions du théorème 1.1 résultent alors de la suite exacte d'homologie relative pour le couple $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \mathscr{L})$.

La récurrence débute à $d = \dim A = 0$. Dans ce cas, $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est composé d'un nombre fini de points avec $p \neq 0$. On a $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ et $\mathscr{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A) = \mathscr{L}$. Mais $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet composé de $\mathscr{L}$ et de $p-1$ $(2n-1)$-sphères, donc l'inclusion $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}$ induit des isomorphismes

$$H_k(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash\{a_1, \ldots, a_p\}) \quad \text{pour} \quad k \leqslant 2n - 2\,.$$