1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 45-59

PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

par Etienne GHYS

1. INTRODUCTION

Soit B^{n+1} la boule unité fermée dans $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ et S^n la sphère unité. Soit $\mathrm{Diff}_0^k(S^n)$ et $\mathrm{Diff}_0^k(B^{n+1})$ les groupes des difféomorphismes de classe C^k de S^n et B^{n+1} respectivement qui sont C^k-isotopes à l'identité $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$. Par restriction au bord, on a un morphisme de groupes:

$$\rho : \mathrm{Diff}_0^k(B^{n+1}) \to \mathrm{Diff}_0^k(S^n) .$$

Il est bien connu que ρ est surjectif. En effet, soit f un élément de $\mathrm{Diff}_0^k(S^n)$ et $f_t (t \in [0,1])$ une C^k-isotopie entre $f_0 = \mathrm{id}$ et $f_1 = f$. On peut bien sûr supposer que $f_t = \mathrm{id}$ pour t assez petit de sorte que l'application définie par:

$$\begin{aligned} &F : B^{n+1} \to B^{n+1} \\ &F(x) = \| x \| . f_{\| x \|} \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \quad \text{pour} \quad x \neq 0 , \\ &F(0) = 0 , \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe C^k, isotope à l'identité, dont la restriction au bord de B^{n+1} coïncide avec f.

Dans le cas des homéomorphismes, c'est-à-dire lorsque $k = 0$, le morphisme ρ admet une section évidente. Le prolongement radial d'un homéomorphisme f de la sphère S^n est l'homéomorphisme $\sigma(f)$ de B^{n+1} défini par:

$$\begin{aligned} &\sigma(f)(x) = \| x \| . f \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \quad \text{pour} \quad x \neq 0 , \\ &\sigma(f)(0) = 0 . \end{aligned}$$

Ce prolongement σ définit un morphisme de groupes qui est une section de ρ. Bien sûr $\sigma(f)$ n'est généralement pas différentiable en 0 même si f est de classe C^∞. Le but de cette note est de montrer que cette difficulté ne peut pas être évitée lorsque $k \geqslant 1$.

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme de groupes* σ *de* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^n)$ *vers* $\mathrm{Diff}_0^1(B^{n+1})$ *tel que, pour tout* f *de* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^n)$, *le difféomorphisme* $\sigma(f)$ *soit un prolongement de* f *à la boule.*

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème on ne suppose pas que le morphisme σ est continu; il s'agit *a priori* d'un morphisme de groupes abstraits.

Voici un exemple d'une situation contraire. Considérons le cercle comme bord de la bande de Moebius M. Il se trouve que, dans ce cas, il existe un morphisme σ de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^1)$ vers le groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes de classe C^∞ de M isotopes à l'identité tel que, pour tout f de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^1)$, le difféomorphisme $\sigma(f)$ prolonge f à la bande M. Pour cela, on considère le disque unité ouvert $\mathring{B}^2$ de $\mathbf{R}^2$ comme plongé dans le plan projectif réel P^2. Le complémentaire de $\mathring{B}^2$ dans P^2 est une bande de Moebius M dont le bord est le cercle unité S^1. Deux points de S^1, éventuellement confondus, définissent deux tangentes dans P^2 qui se coupent en un point de M. Réciproquement, par un point de M passent deux tangentes à S^1 (confondues si le point considéré est sur S^1). Ainsi M s'identifie à l'espace des paires de points (éventuellement confondus) sur un cercle et le bord de M correspond aux paires de points confondus. Il est maintenant clair qu'un difféomorphisme f du cercle S^1 définit naturellement un difféomorphisme $\sigma(f)$ de M qui prolonge f à la bande M.

La démonstration du théorème lorsque $n = 1$ est élémentaire et va servir de modèle pour le cas général. Nous avons cru utile de détailler d'abord ce cas particulier au paragraphe 2. Une lecture sommaire de cette note pourrait d'ailleurs se limiter à ce paragraphe. On étudie alors le cas où n est un entier impair quelconque au paragraphe 3 puis le cas où n est pair au paragraphe 4. Le paragraphe 5 est consacré à des remarques générales inspirées par le théorème.

2. LE CAS $n = 1$

Nous commencerons par un lemme élémentaire. La démonstration que nous en proposons est rapide mais elle utilise des outils puissants d'analyse. Il est possible par ailleurs d'en donner une démonstration topologique (voir [4]).