Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS
Autor: Bavard, Christophe
Kapitel: 1. Longueur de $[u,v]^n$.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58734

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$f(xy) - f(x) - f(y)$ est le cobord de f. En fait ce noyau est isomorphe par le cobord à l'espace K des quasi-morphismes *homogènes* $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ (i.e. $\varphi(x^n) = n\varphi(x), x \in \Gamma, n \in \mathbf{Z}$) définis à l'addition d'un morphisme près (voir [Be] ou 3.3). La longueur stable apparaît alors comme une version duale d'une norme naturelle sur K:

$$\| \varphi \| = \sup\{ | \varphi([x, y]) | ;\ x, y \in \Gamma \} .$$

Plus précisément:

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Pour tout élément* γ *de* Γ' *on a la relation*

$$\| \gamma \| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| \varphi \|} .$$

Ce résultat met en évidence la longueur stable comme une quantité naturelle du point de vue de la cohomologie bornée, puisqu'elle est déterminée par les quasi-morphismes. La longueur des commutateurs, quant à elle, est seulement *minorée* par les quasi-morphismes (voir 1.1).

Cet article comprend trois parties. La première contient une preuve élémentaire de la formule (1) ainsi qu'une petite généralisation. Dans la partie 2, on détermine la longueur des commutateurs dans les groupes libres; on y considère également les produits de carrés car ils s'interprètent topologiquement comme les produits de commutateurs (par des surfaces). Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude de la longueur stable; on décrit le phénomène de dualité avec la cohomologie bornée et les propriétés qui en découlent.

Je remercie Etienne Ghys pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Il m'a expliqué que le genre des classes d'homologie de dimension 2 ([B-G]) s'interprète comme nombre minimal de commutateurs. J'ai apprécié sa disponibilité et ses judicieux conseils.

1. LONGUEUR DE $[u, v]^n$.

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant, qui généralise la relation (1) de l'introduction:

THÉORÈME 1. *Dans le groupe libre à* $2k$ *générateurs* $(k \in \mathbf{N}^*)$

$$u_i, v_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

on a l'égalité:

$$c(\{[u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]\}^n) = n(k-1) + E(n/2) + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

Nous commencerons par traiter le cas où $k = 1$ en minorant la longueur de $[u, v]^n$ (1.1), puis en la majorant (1.2); l'énoncé général du théorème 1 s'en déduira alors facilement (1.3). Signalons que la relation (1) sera retrouvée indépendamment au §2.7. Enfin, il nous a semblé intéressant de donner une décomposition explicite de $[u, v]^n$ en produit de $E(n/2) + 1$ commutateurs (1.4).

1.1. Quasi-morphismes et commutateurs

Nous allons voir que la donnée d'un quasi-morphisme permet de minorer la longueur des commutateurs; un bon choix dans le cas du groupe libre $L(u, v)$ donnera alors la minoration cherchée pour $c([u, v]^n)$.

On appellera *défaut* d'un quasi-morphisme f la borne supérieure de $|f(xy) - f(x) - f(y)|$ pour x et y dans Γ.

Lemme 1.1. *Soit* $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ *un quasi-morphisme antisymétrique (i.e.* $f(x^{-1}) = -f(x), x \in \Gamma$*) de défaut* D. *Alors pour tout élément* γ *de* Γ':

$$c(\gamma) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{|f(\gamma)|}{D} + 1\right) .$$

En effet si γ est le produit de k commutateurs, $f(\gamma)$ est égal, à $(4k-1)D$ près, à une somme de $4k$ termes qui s'annulent deux à deux par antisymétrie. D'où l'inégalité $|f(\gamma)| \leqslant (4k-1)D$.

Cette observation apparaît déjà dans [Mil 1].

Remarques.

1) On peut toujours antisymétriser un quasi-morphisme suivant la formule $1/2(f(x) - f(x^{-1}))$. Cette opération n'augmente pas le défaut.
2) L'existence d'un quasi-morphisme non borné sur Γ' implique que $c(\Gamma)$ est infini.

Le lemme indique clairement la méthode pour bien minorer $c(\gamma)$: il s'agit de trouver un quasi-morphisme de petit défaut et qui prend une grande valeur sur γ.

Voici maintenant des exemples intéressants, dus à R. Brooks ([Brk]), de quasi-morphismes du groupe libre $L = L(u, v)$ (signalons que B. Johnson

avait construit auparavant un quasi-morphisme du groupe libre L: voir [Jo] p. 38).

Etant donné un mot réduit M en u et v, on note $\mathcal{O}_M(x)$ le nombre d'occurences de M dans l'écriture *réduite* d'un élément x de L et on pose

$$f_M(x) = \mathcal{O}_M(x) - \mathcal{O}_{M^{-1}}(x) .$$

Vérifions que f_M est un quasi-morphisme. Soit X et Y deux mots réduits. Supposons d'abord que XY est aussi réduit; on a alors:

$$f_M(XY) = f_M(X) + f_M(Y) + \delta_M(X, Y)$$

où $\delta_M(X, Y)$ provient des occurences de M et M^{-1} situées «à cheval» sur X et Y, donc $|\delta_M(X, Y)|$ est au plus égal à long $M - 1$.

De façon plus générale X et Y s'écrivent respectivement $X'A$ et $A^{-1}Y'$ (avec $X'Y'$ réduit) et on a:

$$\begin{aligned} &f_M(X'Y') - f_M(X) - f_M(Y) \\ &= \delta_M(X', Y') - \delta_M(X', A) - \delta_M(A^{-1}, Y') . \end{aligned} \tag{2}$$

Le défaut de f_M est donc majoré par $3(\text{long } M - 1)$.

Cette estimation est souvent améliorable sur des exemples; ainsi pour $M = uv$, on constate qu'un seul des trois termes de droite dans (2) peut être non nul, donc le défaut de f_{uv} est égal à 1. Posons alors

$$f = f_{uv} + f_{vu^{-1}} + f_{u^{-1}v^{-1}} + f_{v^{-1}u} .$$

Le défaut de f est visiblement (par additivité) majoré par 4. Mais un examen plus attentif de la relation (2) permet d'obtenir mieux:

Affirmation. Le défaut de f est égal à 2.

Preuve. Reprenons les notations ci-dessus: $X = X'A$, $Y = A^{-1}Y'$. On exclut le cas évident où l'un des mots A, X' ou Y' est vide. Comme f est invariant par la permutation cyclique $u \to v \to u^{-1} \to v^{-1} \to u$ sur les lettres des mots, on peut supposer que X' se termine par la lettre u. Il reste alors six cas possibles:

X'	A	A^{-1}	Y'	*valeur de* (2)
$\dots u$	$u \dots$	$\dots u^{-1}$	$v \dots$	2
$\dots u$	$v^{-1} \dots$	$\dots v$	$v \dots$	2
$\dots u$	$u \dots$	$\dots u^{-1}$	$v^{-1} \dots$	-2
$\dots u$	$v \dots$	$\dots v^{-1}$	$v^{-1} \dots$	-2
$\dots u$	$v \dots$	$\dots v^{-1}$	$u \dots$	-2
$\dots u$	$v^{-1} \dots$	$\dots v$	$u \dots$	2

Il est maintenant facile d'établir l'inégalité $c([u,v]^n) \geqslant E(n/2) + 1$: on applique le lemme à f sachant que $f([u,v]^n) = 4n - 1$ et que $D = 2$.

1.2. $[u,v]^n$ EST LE PRODUIT DE $E(n/2) + 1$ COMMUTATEURS

Le nombre de commutateurs a une interprétation topologique simple que nous allons exploiter.

Notons Σ_g la surface orientable de genre g dont le bord est un cercle, et $\pi_1(\Sigma_g, *)$ son groupe fondamental. On omettra le point-base $*$ qui sera toujours pris sur le bord. Bien que $\pi_1(\Sigma_g)$ soit un groupe libre, il sera commode de le présenter de la façon suivante:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c \mid c = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle .$$

L'élément c est représenté par le bord $\partial\Sigma_g$ de Σ_g.

Soit maintenant Γ un groupe et X un espace topologique dont le groupe fondamental est précisément Γ. Etant donné un élément γ de Γ', on a deux propriétés équivalentes:

(i) γ est le produit de g commutateurs;

(ii) il existe une application continue $f: \Sigma_g \to X$ telle que $f(\partial\Sigma_g)$ représente γ.

Pour voir que (ii) entraîne (i), il suffit d'écrire la relation homotopique

$$\gamma = f_*(c) = \prod_{i=1}^{g} [f_*(a_i), f_*(b_i)] .$$

La réciproque, que nous n'utiliserons pas ici, s'établit facilement en construisant f à partir de la description usuelle de Σ_g comme quotient d'un polygone à $4g + 1$ côtés.

Puisqu'on étudie le cas du groupe libre $L(u,v)$, on prend $X = \Sigma_1$, et on choisit les générateurs u et v de sorte que $[u,v]$ soit représenté par le bord $\partial\Sigma_1$. Par ailleurs, on observe que pour écrire $[u,v]^n$ comme produit de $E(n/2) + 1$ commutateurs, il suffit de le faire quand n est *impair*. La propriété cherchée sera alors une conséquence du fait suivant:

PROPOSITION ([Ma 2], [H-S]). *Si n est impair, il existe un revêtement de degré n de Σ_1 par Σ_g avec $g = (n+1)/2$.*

Admettons un instant ce résultat: le revêtement doit envoyer $\partial\Sigma_g$ sur l'élément $[u,v]^n$, qui se trouve du coup écrit comme produit de $(n+1)/2$ commutateurs! Cela achève la preuve de l'inégalité $c_L([u,v]^n) \leqslant E(n/2) + 1$.

Remarque. Cette méthode est utilisée dans [Min] pour montrer que $[u, v]^{2k+1} (k \in \mathbf{N}^*)$ est le produit de $k + 1$ commutateurs.

Preuve de la proposition. Je remercie Alexis Marin qui m'a signalé la démonstration ci-dessous.

Rappelons qu'à toute action à gauche de $\pi_1(\Sigma_1)$ sur un ensemble à n éléments $\{1, \ldots, n\}$ on peut associer, par «suspension», un revêtement de degré n de Σ_1. L'action par relèvements des chemins dans la fibre du revêtement est alors opposée à l'action donnée: le revêtement est connexe si et seulement si cette action est transitive.

Il se trouve que pour n impair, la permutation cyclique $(1, 2, \ldots, n)$ est un commutateur dans le groupe $\mathscr{S}_n$ des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$(1, 2, \ldots, n) = (1, k+2, \ldots, n)(1, 2, \ldots, k+1) \qquad (n = 2k+1)$$

produit de deux $(k + 1)$-cycles, le second étant conjugué à l'inverse du premier. D'où un morphisme de $\pi_1(\Sigma_1)$ dans $\mathscr{S}_n$ qui envoie $[u, v]$ sur $(1, 2, \ldots, n)$. Le revêtement associé est une surface orientable connexe, et comme l'action de $[u, v]$ est déjà transitive, son bord est connexe. Il s'agit donc d'une surface Σ_g, où g est déterminé par la relation $1 - 2g = -n$.

1.3. Longueur de $\{[u_1, v_1] \ldots [u_k, v_k]\}^n$

Dans ce paragraphe, on prouve le théorème 1 en s'appuyant sur le fait que $c([u, v]^n) = E(n/2) + 1$.

Lemme 1.3. *Soit* Γ *un groupe et* γ, δ *deux éléments de* Γ'. *On a alors l'inégalité*

$$c(\{\gamma\delta\}^n) \leqslant nc(\delta) + c(\gamma^n) \qquad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

La preuve est immédiate à partir de l'identité

$$(\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\gamma^{-1})(\gamma^2\delta\gamma^{-2}) \ldots (\gamma^n\delta\gamma^{-n})\gamma^n .$$

En appliquant ceci à

$$\Gamma = L(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k), \gamma = [u_1, v_1] \quad \text{et} \quad \delta = [u_2, v_2] \ldots [u_k, v_k] ,$$

on obtient

$$c(\{[u_1, v_1] \ldots [u_k, v_k]\}^n) \leqslant n(k-1) + E(n/2) + 1 .$$

Pour établir l'inégalité inverse, écrivons $[u, v]^{2k-1}$ comme produit de k commutateurs du groupe libre $L(u, v)$:

$$[u,v]^{2k-1} = [a_1,b_1]\dots[a_k,b_k]\ (a_i,b_i \in L(u,v)).$$

On peut alors définir un morphisme $\Phi: L(u_1,v_1\dots u_k,v_k) \to L(u,v)$ en envoyant u_i sur a_i et v_i sur $b_i (i=1,\dots,k)$. Si l'on note α l'élément

$$\{[u_1,v_1]\dots[u_k,v_k]\}^n ,$$

on a donc

$$c(\alpha) \geqslant c(\Phi(\alpha)) = c([u,v]^{n(2k-1)}) = n(k-1) + E(n/2) + 1 .$$

Ceci termine la démonstration du théorème 1.

1.4. Voici une preuve complètement élémentaire et explicite de l'inégalité $c([u,v]^n) \leqslant E(n/2) + 1$.

Afin d'alléger l'écriture, posons

$$(p,q) = {}^{u^q}([u,v]^p) = u^q[u,v]^p u^{-q} \qquad (p,q \in \mathbf{Z}) .$$

Ainsi

$$[u^n,v] = (1,n-1)(1,n-2)\dots(1,1)(1,0) \qquad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

Considérons alors le produit de 2 commutateurs

$$\Delta = \left[{}^{u^{n-2}}[u,v]\ {}^{u^{n-3}}([u,v]^2)\ \dots\ {}^{u}([u,v]^{n-2})\,[u,v]^{n-1}, u\right][u^n,v]$$

c'est-à-dire

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} \Delta = {} & (1,n-2)(2,n-3)\dots(n-1,0)(-n+1,1)\dots \\ & \dots(-3,n-3)(-1,n-2)(1,n-3)(1,n-4)\dots(1,1)(1,0) . \end{aligned}$$

Bien que le cas n impair suffise, commençons par examiner le cas n pair $(n=2k)$ qui est plus simple. En notant

$$A = (1,2k-2)(2,2k-3)$$

et

$$B = (3,2k-4)(4,2k-5)\dots(-4,2k-4)(-3,2k-3)(-1,2k-1)$$

on a

$$[B,A]\Delta = (3,2k-4)(4,2k-5)\dots(-3,2k-4)(1,2k-5)\dots(1,1)(1,0) .$$

On remarque que la valeur maximale de q dans les (p,q) a diminué de $2k-2$ pour Δ à $2k-4$ pour $[B,A]\Delta$; en répétant cette opération $k-1$ fois on obtient $(2k,0) = [u,v]^{2k}$ comme produit de $k+1$ commutateurs.

Exemple $(n=4)$: $[u,v]^4 = \left[[u,v]^3\ {}^{u}([v,u]^3)\ {}^{u^2}[v,u],\ {}^{u^2}[u,v]\ {}^{u}([u,v]^2)\right]$

$$\left[{}^{u^2}[u,v]\ {}^{u}([u,v]^2)\,[u,v]^3, u\right][u^4,v] .$$

Passons au cas où n est impair ($n = 2k + 1$). La relation (R) s'écrit aussi

$$[C, u]\,[u^n, v] = CD(1, n-3)(1, n-4)\dots(1,1)(1,0)$$

avec $$C = (1, n-2)(2, n-3)(3, n-4)\dots(n-1, 0)$$

et $$D = (-n+1, 1)\dots(-4, n-4)(-3, n-3)(-1, n-2)\,.$$

Compte tenu de l'identité

$$[y, x]\,[x, z] = [yz^{-1}, zxz^{-1}]$$

on voit que l'élément

$$\Delta' = (-2k, 1)\dots(-4, 2k-3)(-1, 2k-2)(3, 2k-3)$$
$$\dots\underbrace{(2k, 0)(1, 2k-2)}\,\underbrace{(1, 2k-3)\dots(1, 0)}$$

est le produit de 2 commutateurs. La transposition des blocs $\llcorner\!\!\!\!____\lrcorner$ et $\llcorner___\lrcorner$ diminue la valeur maximale de q de 2 unités, au prix d'un commutateur; au bout de $k-1$ opérations analogues il vient

$$\Delta' = (2k, 0)\prod_{i=1}^{k-1}[A_i, B_i](1, 0) \qquad (A_i, B_i \in L, i = 1\dots k-1)\,.$$

On termine en conjuguant par $(1, 0)$.

Exemple ($n = 3$).

$$[u, v]^3 = \left[{}^u[v, u]u^{-1}, {}^{u^2}[u, v]\,{}^u([u, v]^2)\right]\,[u^3, v]\,.$$

2. Longueur des commutateurs dans les groupes libres

Cette partie est consacrée à l'étude des produits de commutateurs et de carrés dans les groupes libres. On y retrouve les résultats de [G-T] et [Cu] en utilisant directement l'algorithme de classification des surfaces.

2.1. Il convient avant tout de faire une petite remarque. Soit U un ensemble et $L(U)$ le groupe libre de base U. Si U est inclus dans V, on a pour tout élément γ de $L'(U)$:

$$c_{L(U)}(\gamma) = c_{L(V)}(\gamma)\,.$$

En effet toute relation dans $L(V)$ se projette dans $L(U)$ grâce à la rétraction évidente $L(V) \to L(U)$.

Donc, pour calculer $c(\gamma)$, *on peut se restreindre au sous-groupe engendré par ceux des générateurs qui interviennent dans l'écriture réduite de* γ.