Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

Autor: Pays, Isabelle / Valette, Alain

Kapitel: 6. Le cas des arbres réels

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58735

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

un sous-groupe libre d'indice fini sur zéro, un ou plusieurs générateurs (voir [SW], Theorem 7.3 et [BK], Corollary 2.8)[7]).

6. Le cas des arbres réels

Un *arbre réel* est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui est de plus isométrique à un intervalle de **R**. Ces objets ont été introduits par Tits [T3], sous le nom d'«arbres». Nous renvoyons à l'article original de Tits pour le rôle des arbres réels en algèbre, et aux travaux de Morgan-Shalen [MS], Culler-Morgan [CM] et Paulin [Pl] pour leur rôle en topologie. Notons qu'un arbre ordinaire peut être vu comme un arbre réel, en remplaçant chaque arête par une copie isométrique de l'intervalle $[0, 1]$, et en prolongeant la métrique d de manière évidente.

Une *demi-droite* (resp. *droite*) d'un arbre réel X est une image isométrique de la demi-droite $[0, \infty[$ (resp. la droite **R**).

On note Isom X le groupe des isométries de l'arbre réel X. La classification des isométries est encore plus simple que pour un arbre ordinaire (voir [T3], 3.1; [MS], Theorem II.2.3). Les isométries sont de deux types:

— Les isométries qui fixent au moins un point. Il s'agit des isométries *elliptiques,* ou *rotations.*

— Les isométries qui ne fixent aucun point. Il s'agit des isométries *hyperboliques,* ou *translations.* Comme dans le cas des arbres ordinaires, une telle isométrie g possède une unique droite invariante, appelée *axe* de g, et le long de laquelle g agit par translation.

Un *bout* de l'arbre réel X est un élément de la limite projective

$$\lim_{\leftarrow} \pi_0(X - B)$$

où B parcourt les parties bornées fermées de X, et $\pi_0(X - B)$ désigne l'espace des composantes connexes de $X - B$ (voir [CM], §2; [C1], §1). Lorsque l'arbre réel X est complet, cette définition équivaut à celle de Tits ([T3], 1.1) analogue à celle que nous avons donnée au §1 en termes de classes d'équivalence de demi-droites[8]). Si on le désire, on peut avec Tits ne considérer que des arbres réels complets: en effet la complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel ([MS], Corollary II.1.10).

---

[7]) Notons X_∞ l'arbre homogène de degré infini, où tout sommet a une infinité dénombrable de voisins. Soit G un groupe discret opérant transitivement avec stabilisateurs finis sur X_∞. Dans [V1], le second auteur construit des représentations uniformément bornées non unitarisables de G. L'existence de telles représentations implique la non-moyennabilité de G. Le corollaire 4 ou le résultat de Bass-Kulkarni donnent la raison de cette non-moyennabilité.

PROPOSITION 4. *Soient X un arbre réel, et G un sous-groupe de* Isom X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *G ne fixe aucun point, aucun bout, et aucune paire de bouts de X;*

(ii) *G contient un sous-groupe libre non abélien qui agit librement et proprement discontinûment sur X.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nous avons pris soin, aux §§ 1-2, d'écrire la preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du Théorème de manière à ce qu'elle s'adapte *mutatis mutandis* au cas des arbres réels. De plus, il est facile de vérifier à la proposition 3 que le groupe libre engendré par deux translations d'axes disjoints agit proprement discontinûment (voir la preuve de la proposition 3, ou le lemme 2.6 de [CM]).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Montrons que, si G fixe un point, un bout ou une paire de bouts de X, alors G ne peut contenir de groupe libre non abélien agissant librement sur X. C'est clair si G fixe un point. Si G fixe un bout ω, on fait la remarque suivante: si g_1, g_2 sont deux translations dans G, l'intersection de leurs axes contient une demi-droite $[x, \omega[$. Quitte à remplacer g_i par g_i^{-1}, on peut supposer $g_i[x, \omega[\subseteq [x, \omega[\, (i = 1, 2)$; alors $g_1 g_2 x = g_2 g_1 x$, donc $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ fixe x. Cette remarque montre que les seuls sous-groupes libres de G agissant librement sur X sont sur zéro ou un générateur. Enfin, si G fixe une paire de bouts $\{\alpha, \omega\}$, une translation dans G a pour axe la droite $]\alpha, \omega[$, donc deux translations dans G commutent. A nouveau, on voit que les seuls sous-groupes libres de G agissant librement sur X sont sur zéro ou un générateur.

Grâce à la proposition 4, on déduit immédiatement l'analogue pour les arbres réels du corollaire 1 du § 5: si X est un arbre réel, et G un sous-groupe de Isom X qui contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, alors G fixe un point, un bout ou une paire de bouts de X. Rappelons que ce résultat est dû à Tits ([T3], 3.4 et 2.3.6).

AJOUTÉ SUR ÉPREUVES: Identifions $PSL_2(\mathbf{R})$ avec le groupe des isométries orientées du disque de Poincaré D. Il résulte des preuves de la Proposition et du Théorème 1 de [H1] que l'alternative de Tits pour $PSL_2(\mathbf{R})$ prend la forme suivante: un sous-groupe G de $PSL_2(\mathbf{R})$ contient un sous-groupe libre non abélien si et seulement si G ne fixe aucun point de D, aucun point au bord de D, et aucune paire de points au bord de D. L'analogie entre cet énoncé et l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de notre théorème est évidemment frappante.

---

[8]) Ces deux définitions ne sont pas équivalentes pour un arbre réel non complet, comme le montre l'exemple banal de l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$.