6. Le cas des arbres réels

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

un sous-groupe libre d'indice fini sur zéro, un ou plusieurs générateurs (voir [SW], Theorem 7.3 et [BK], Corollary 2.8)[7]).

6. Le cas des arbres réels

Un *arbre réel* est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui est de plus isométrique à un intervalle de **R**. Ces objets ont été introduits par Tits [T3], sous le nom d'«arbres». Nous renvoyons à l'article original de Tits pour le rôle des arbres réels en algèbre, et aux travaux de Morgan-Shalen [MS], Culler-Morgan [CM] et Paulin [Pl] pour leur rôle en topologie. Notons qu'un arbre ordinaire peut être vu comme un arbre réel, en remplaçant chaque arête par une copie isométrique de l'intervalle $[0, 1]$, et en prolongeant la métrique d de manière évidente.

Une *demi-droite* (resp. *droite*) d'un arbre réel X est une image isométrique de la demi-droite $[0, \infty[$ (resp. la droite **R**).

On note Isom X le groupe des isométries de l'arbre réel X. La classification des isométries est encore plus simple que pour un arbre ordinaire (voir [T3], 3.1; [MS], Theorem II.2.3). Les isométries sont de deux types:

— Les isométries qui fixent au moins un point. Il s'agit des isométries *elliptiques,* ou *rotations.*

— Les isométries qui ne fixent aucun point. Il s'agit des isométries *hyperboliques,* ou *translations.* Comme dans le cas des arbres ordinaires, une telle isométrie g possède une unique droite invariante, appelée *axe* de g, et le long de laquelle g agit par translation.

Un *bout* de l'arbre réel X est un élément de la limite projective

$$\lim_{\leftarrow} \pi_0(X - B)$$

où B parcourt les parties bornées fermées de X, et $\pi_0(X - B)$ désigne l'espace des composantes connexes de $X - B$ (voir [CM], §2; [C1], §1). Lorsque l'arbre réel X est complet, cette définition équivaut à celle de Tits ([T3], 1.1) analogue à celle que nous avons donnée au §1 en termes de classes d'équivalence de demi-droites[8]). Si on le désire, on peut avec Tits ne considérer que des arbres réels complets: en effet la complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel ([MS], Corollary II.1.10).

---

[7]) Notons X_∞ l'arbre homogène de degré infini, où tout sommet a une infinité dénombrable de voisins. Soit G un groupe discret opérant transitivement avec stabilisateurs finis sur X_∞. Dans [V1], le second auteur construit des représentations uniformément bornées non unitarisables de G. L'existence de telles représentations implique la non-moyennabilité de G. Le corollaire 4 ou le résultat de Bass-Kulkarni donnent la raison de cette non-moyennabilité.

PROPOSITION 4. *Soient X un arbre réel, et G un sous-groupe de* Isom X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *G ne fixe aucun point, aucun bout, et aucune paire de bouts de X;*

(ii) *G contient un sous-groupe libre non abélien qui agit librement et proprement discontinûment sur X.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Nous avons pris soin, aux §§ 1-2, d'écrire la preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du Théorème de manière à ce qu'elle s'adapte *mutatis mutandis* au cas des arbres réels. De plus, il est facile de vérifier à la proposition 3 que le groupe libre engendré par deux translations d'axes disjoints agit proprement discontinûment (voir la preuve de la proposition 3, ou le lemme 2.6 de [CM]).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Montrons que, si G fixe un point, un bout ou une paire de bouts de X, alors G ne peut contenir de groupe libre non abélien agissant librement sur X. C'est clair si G fixe un point. Si G fixe un bout ω, on fait la remarque suivante: si g_1, g_2 sont deux translations dans G, l'intersection de leurs axes contient une demi-droite $[x, \omega[$. Quitte à remplacer g_i par g_i^{-1}, on peut supposer $g_i[x, \omega[\subseteq [x, \omega[\, (i = 1, 2)$; alors $g_1 g_2 x = g_2 g_1 x$, donc $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ fixe x. Cette remarque montre que les seuls sous-groupes libres de G agissant librement sur X sont sur zéro ou un générateur. Enfin, si G fixe une paire de bouts $\{\alpha, \omega\}$, une translation dans G a pour axe la droite $]\alpha, \omega[$, donc deux translations dans G commutent. A nouveau, on voit que les seuls sous-groupes libres de G agissant librement sur X sont sur zéro ou un générateur.

Grâce à la proposition 4, on déduit immédiatement l'analogue pour les arbres réels du corollaire 1 du § 5: si X est un arbre réel, et G un sous-groupe de Isom X qui contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, alors G fixe un point, un bout ou une paire de bouts de X. Rappelons que ce résultat est dû à Tits ([T3], 3.4 et 2.3.6).

AJOUTÉ SUR ÉPREUVES: Identifions $PSL_2(\mathbf{R})$ avec le groupe des isométries orientées du disque de Poincaré D. Il résulte des preuves de la Proposition et du Théorème 1 de [H1] que l'alternative de Tits pour $PSL_2(\mathbf{R})$ prend la forme suivante: un sous-groupe G de $PSL_2(\mathbf{R})$ contient un sous-groupe libre non abélien si et seulement si G ne fixe aucun point de D, aucun point au bord de D, et aucune paire de points au bord de D. L'analogie entre cet énoncé et l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de notre théorème est évidemment frappante.

---

[8]) Ces deux définitions ne sont pas équivalentes pour un arbre réel non complet, comme le montre l'exemple banal de l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$.