1.3. Structures presque complexes en dimension 4

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Remarque. Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère S^{2n}, celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par $(n-1)!$ (*voir* par exemple [5]), donc si $n = 1, 2$ ou 3 mais dans le cas $n = 2$ ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur S^2 et il n'est pas très difficile d'en construire sur S^6 (*voir* par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que V_1 et V_2 possèdent une structure presque complexe pour que $V_1 \# V_2$ n'en possède aucune.

1.3. Structures presque complexes en dimension 4

Si W est une variété fermée orientée de dimension 4 et si J est une structure presque complexe sur W alors le fibré tangent (TW, J) possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern $c_1 \in H^2(W;\mathbf{Z})$ et $c_2 \in H^4(W;\mathbf{Z})$. Elles sont reliées à la signature σ de (la forme d'intersection de) W par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W]\rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal c_2 est la classe d'Euler de TW et ne dépend pas de J. En appelant Q la forme quadratique sur $H^2(W;\mathbf{Z})$ et χ la caractéristique d'Euler, on voit que $c_1(TW, J)$ doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe J puisse exister sur W, il est donc nécessaire que $H^2(W;\mathbf{Z})$ contienne une classe x qui vérifie:

$$(1) \qquad \begin{cases} Q(x) = 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) = w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe c_1 est la classe de Stiefel-Whitney w_2).

Exemple. Pour que la somme connexe $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il faut que n soit impair.

Démonstration. Dans ce cas on a $\chi = n + 2, \sigma = n$ et dans la base évidente de $H^2(\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C});\mathbf{Z})$, la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

On doit donc pouvoir trouver des entiers *impairs* $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2(n+2) + 3n = 5n + 4 . \tag{2}$$

En calculant modulo 8 on voit que $n \equiv 5n + 4 \bmod 8$ et donc que n doit être impair. □

Si on se rappelle, que grâce à Wu [12], w_2 est caractéristique pour Q, c'est-à-dire que

$$\langle w_2 \cup \rho_2(x), [W] \rangle = Q(x) \bmod 2$$

pour tout x de $H^2(W; \mathbf{Z})$, on montre de façon analogue:

PROPOSITION 1.3.1. *Si V_1 et V_2 sont deux variétés presque complexes de dimension 4, la somme connexe $V_1 \# V_2$ ne possède aucune structure presque complexe.*

COROLLAIRE 1.3.2. *Si W est une variété de dimension 4 qui possède une structure presque complexe, alors $W \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ n'en possède aucune.* □

Par exemple $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overset{n}{\#} \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ ne possède aucune structure presque complexe, *a fortiori* aucune forme symplectique. En effet

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overset{n}{\#} \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$$

est le résultat de l'éclatement de n points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et porte donc une structure complexe.

Remarque. En dépit de la notation, $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ n'est bien sûr pas une somme connexe de variétés presque complexes: il n'y a aucune structure presque complexe sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui induise l'orientation opposée (c'est-à-dire celle qui définit l'objet noté $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$).

Démonstration de la proposition. Soit x_i la première classe de Chern de (V_i, J_i), de sorte que

$$Q_i(x_i) = 2\chi(V_i) + 3\sigma(V_i)$$

Supposons que la somme connexe W possède une structure presque complexe. Elle va ainsi acquérir une première classe de Chern

$$y = (y_1, y_2) \in H^2(V_1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(V_2; \mathbf{Z}) = H^2(W; \mathbf{Z})$$

qui vérifiera:

$$\begin{aligned} Q(y) &= Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &= 2\chi(W) + 3\sigma(W) \\ &= 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) \end{aligned}$$

Mais y est caractéristique pour Q, sa réduction modulo 2 est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de W ce qui fait que y_i a même réduction modulo 2 que x_i et est donc caractéristique... d'où on déduit, en calculant modulo 8:

$$\begin{aligned} 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) &\equiv Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &\equiv Q_1(x_1) + Q_2(x_2) \\ &\equiv 2\chi(V_1) + 3\sigma(V_1) + 2\chi(V_2) \\ &\quad + 3\sigma(V_2) \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque 4 n'est pas divisible par 8. □

Ce n'est pas vraiment un problème de somme connexe mais un problème de chirurgie: si on ajoute une anse d'indice 0 sur une même composante d'une variété W, on a un résultat tout à fait analogue.

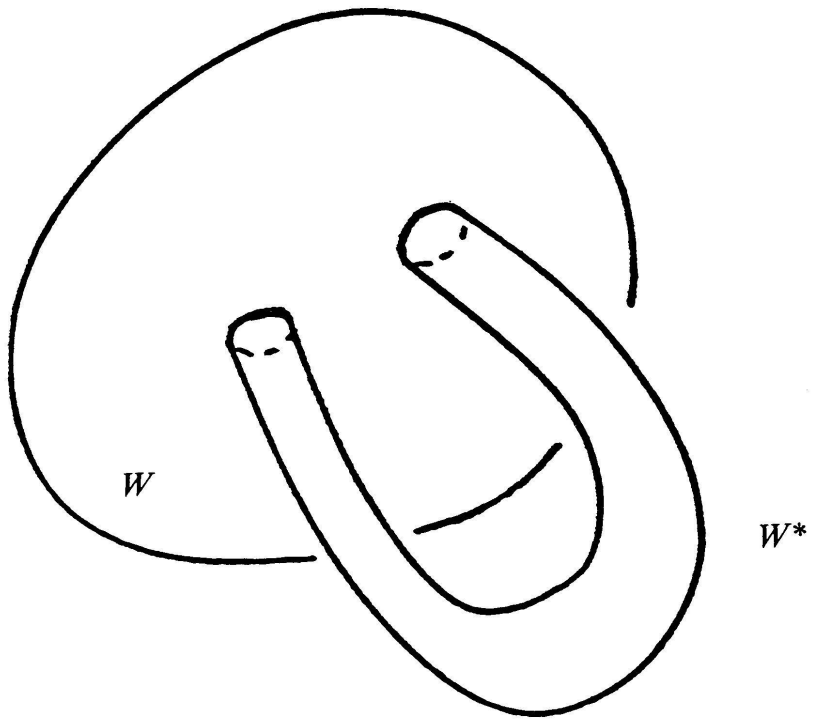

FIGURE 2

La variété «chirurgisée» W^* a le même H^2 que W et sa caractéristique d'Euler est

$$\chi(W^*) = \chi(W) - 2 .$$

Si W est presque complexe, soit x sa première classe de Chern. On a $Q(x) = 3\sigma + 2\chi$. Pour que W^* possède une structure presque complexe quelle qu'elle soit, il faut qu'on puisse trouver un $y \in H^2(W;\mathbf{Z})$ avec $\rho_2(y) = \rho_2(x) = w_2$ et $Q(y) = 3\sigma + 2\chi - 4$ ce qui est interdit par le même calcul modulo 8. □

C'est encore un théorème de Wu [12] qui affirme que l'existence d'une classe x vérifiant (1) est suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe J (dont x est alors la première classe de Chern, plus précisément la classe d'homotopie de J est déterminée par cet x).

Exemple. Pour que la somme connexe $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il suffit que n soit impair.

Démonstration. Montrons en effet que l'équation (2) a toujours des solutions. C'est évidemment le cas pour $n = 1$ (!) et bien sûr, si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une solution

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 9 = 5n + 4 + 10 = 5(n+2) + 4$$

et $(a_1, \ldots, a_n, 1, 3)$ est une solution (pour $n+2$). □

Remarque. Dès que $n \geqslant 5$, l'équation (2) a d'autres solutions que celles obtenues par récurrence ci-dessus, par exemple $(5, 1, 1, 1, 1)$ et celles qu'on en déduit en ajoutant des $(1, 3)$.

Exemple. On en déduit que $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}$ a une structure presque complexe si et seulement si n est impair. Comme on a dit, ajouter un $\overline{\mathbf{P}^2}$ peut se faire en éclatant un point, ce qui fait qu'on peut en ajouter autant qu'on veut à $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2$ (pour n impair) et obtenir une variété presque complexe. Au contraire si $n = 2p$, alors $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2} = (\overset{2p-1}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}) \# \mathbf{P}^2$ est la somme connexe de deux variétés possédant des structures presque complexes et donc n'en possède pas. □

Remarque. Il y a aussi des structures presque complexes sur $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}$ qui ne correspondent *pas* à des éclatements de $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2$. L'équation analogue à (2) est

$$(3) \qquad a_1^2 + \cdots + a_n^2 - b_1^2 - \cdots - b_m^2 = 3(n-m) + 2(n+m+2)$$
$$= 5n - m + 4$$

(toujours en entiers impairs) qui a bien sûr comme solutions les

$$(a_1, \ldots, a_n, 1, \ldots, 1)$$

où $(a_1, \ldots, a_n)$ est solution de (2), mais aussi par exemple pour $n = 1$ et $m \geqslant 2$: $(5, 3, 3, 1, \ldots, 1)$ et pour $n = 3$ et $m \geqslant 1$: $(3, 3, 3, 3, 1, \ldots, 1)$.

2. Anses presque complexes

2.1. Anses classiques

Il est assez clair que le mal vient du fait que S^4 ne possède pas de structure presque complexe. Essayons donc de remplacer S^4 par une variété presque complexe pas trop compliquée. La chirurgie considérée ci-dessus peut se décrire ainsi:

$$W^* = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_\partial (B^1 \times S^3)$$
$$= \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_\partial \overline{S^4 - (S^0 \times B^4)}$$

où le recollement se fait maintenant par un difféomorphisme des bords qui renverse l'orientation.

2.2. Anses presque complexes

Cette description se prête à une généralisation: on y remplace S^4 par une variété fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et connexe V.

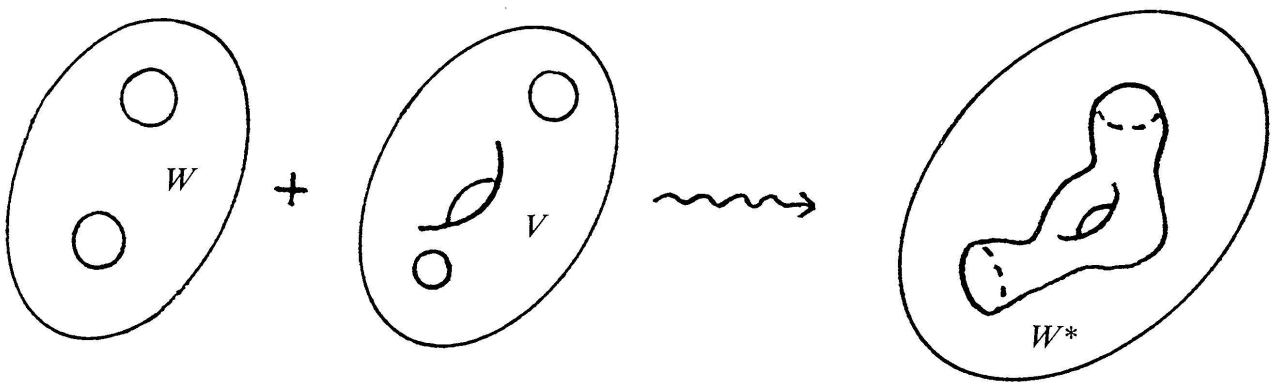

Figure 3