3.2. Le contre-exemple

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Remarque. La proposition reste vraie si on remplace le $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ayant permis de construire l'anse $\mathscr{Y}$ par une variété presque complexe V dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme $2bc + Q_V(d)$ prend la valeur -1 (si d est tel que $Q_V(d) = 2m - 1$, on prend $b = 1$ et $c = -m$), elle est donc équivalente (sur $\mathbf{Z}$) à $-x^2 + Q(y)$ où Q est une forme quadratique entière de rang $b_2(V) + 1$ et de signature $\sigma(V) + 1$ donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection $a^2 + Q(y)$ ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

3. Appendice: Sommes connexes de variétés symplectiques

3.1. Structure sur les tubes

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube $S^{2n-1} \times I$ qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de $\mathbf{R}^{2n}$ – Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension $\neq 2$ ou 6. Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension 6, Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube $S^{2n-1} \times I$ (pour $n \geqslant 2$).

3.2. Le contre-exemple

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension 6, (V_1, ω_1) et (V_2, ω_2) telles que sur $W = V_1 \# V_2$, aucune forme symplectique ω ne puisse avoir, en restriction à V_1, une propriété que possède ω_1.

Proposition 3.2.1. [3, 2.4.B_3], [6.9] *Sur* $W = \mathrm{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$, *il n'existe aucune forme symplectique* ω *qui admette* $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ *comme sous-variété symplectique.*

Remarque. D'après 1.2 et [9], $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$ possède des structures presque complexes.

Démonstration. On va utiliser le fait que l'une des variétés est $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ parce qu'on connaît beaucoup de courbes holomorphes et leurs propriétés dans celle-ci; c'est seulement à la fin de l'argument qu'on utilisera vraiment que l'autre variété est un tore. Supposons donc que ω soit une forme symplectique sur W telle qu'un hyperplan $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ (non touché par la chirurgie) en soit une sous-variété symplectique. Soit J_0 une structure presque complexe adaptée à ω et qui soit la structure standard au voisinage de ce $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. Soit $A \in H_2(W;\mathbf{Z})$ la classe d'homologie d'une droite $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \subset W$.

Remarquons d'abord que cette classe est simple: elle engendre l'image de $\pi_2(W)$ et ne peut donc s'écrire comme somme de classes représentées par des courbes holomorphes (pour aucune structure presque complexe adaptée à ω). Ainsi, d'après Gromov, l'espace $M_p(J,A)/G$ des courbes J-holomorphes (non paramétrées) de la classe A est une variété compacte pour J générique.

On va considérer les courbes de la classe A qui passent par deux points fixés en utilisant l'application d'évaluation

$$e_J\colon M_p(J,A) \times_G (S^2 \times S^2) \to W \times W$$

(où le groupe $G = PSL_2(\mathbf{C})$ opère par changement de paramétrage). Si J est générique, on a affaire à deux variétés compactes de dimension $4n$. En effet

$$\dim M_p(J,A)/G = 2c(A) + 2n - 6 = 2(n+1) + 2n - 6 = 4n - 4$$

grâce au théorème de l'indice (où $c(A) = \langle c_1(W,J), A\rangle = \langle c_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})), A\rangle = n + 1$ et $6 = \dim G$), et donc $\dim M_p(J,A) \times_G (S^2 \times S^2) = 4n$.

On montre maintenant que e_J est de degré 1. Ce degré ne dépend pas du choix de J générique. Considérons un point $(x_0, y_0) \in \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$. On sait qu'il y a une unique courbe C_0 de la classe A et J_0-holomorphe qui passe par ces deux points: c'est vrai dans $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ et on a le

LEMME 3.2.2. *Si une courbe rationnelle J_0-holomorphe de la classe A passe par deux points de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ elle est contenue dans $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$.*

Démonstration du lemme. En effet, J_0 est intégrable au voisinage de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ et on a des intersections > 0, de plus l'intersection homologique de A et $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ vaut $+1$, donc une courbe de la classe A non contenue dans $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ le rencontre en exactement un point. □

Soit maintenant J_n une suite de structures presque complexes génériques[4]) avec $\lim J_n = J_0$ et (x_n, y_n) une suite tendant vers (x_0, y_0) et telle que (x_n, y_n)

[4]) Il n'y a aucune raison pour que J_0 soit générique, il n'y a qu'au voisinage de C_0 qu'on peut en dire quelque chose (*voir* 3.2.3).

soit une valeur régulière de e_{J_n}. Pour n assez grand, il y a une et une seule courbe C_n, J_n-holomorphe, passant par x_n et y_n et proche de C_0 (*voir* le lemme 3.2.3). Supposons $\deg e_{J_n} \neq 1$. On peut alors trouver, pour chaque n, une courbe C'_n, J_n-holomorphe, passant par x_n et y_n et qui ne peut être proche de C_0. Le théorème de compacité permet d'en déduire une courbe J_0-holomorphe $C'_0 \neq C_0$ passant par x_0 et y_0, ce qui est absurde.

Donc $\deg e_J = 1$ pour tout J générique.

Pour l'instant, on a surtout utilisé qu'un des morceaux était un $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, il faut maintenant utiliser que l'autre est T^{2n}. En composant e_J avec le carré d'une application de degré 1 de W dans T^{2n}, on obtient une application de degré 1

$$X = M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) \to T^{2n} \times T^{2n}$$

donc $H^{4n}(X; \mathbf{Z})$ serait engendré par un produit d'éléments de $H^1(X; \mathbf{Z})$. Comme X est un $S^2 \times S^2$-fibré sur une variété de dimension $4n - 4$, tout son H^1 provient de celle-ci et tous les produits sont déjà nuls en dimension $4n - 3$. C'est donc absurde.

La démonstration est terminée, modulo l'existence de C_n proche de C_0. Avec les notations de [7, par. 2], c'est une conséquence du

LEMME 3.2.3. *Soit* $f_0 : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to W$ *le plongement (linéaire) d'image* C_0. *Alors* (f_0, C_0) *est un point régulier de l'opérateur Fredholm* P_A.

Démonstration (voir [3, 2.1. C_1]). Soit $E = f_0^* TW$, c'est aussi $f_0^* T\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec sa structure complexe naturelle (puisque J_0 est la structure complexe usuelle au voisinage de C_0). On sait que dP_A s'identifie à

$$\bar{\partial} : \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, E) \to \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, E) .$$

Comme $\bar{\partial}(\Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)) \subset \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)$, grâce au lemme du serpent dans

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \to & \Omega^{0,0}(E) & \to & \Omega^{0,0}(\nu) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \\
0 & \to & \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \to & \Omega^{0,1}(E) & \to & \Omega^{0,1}(\nu) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

où $\nu = E/T\mathbf{P}^1$, on voit que

$$\operatorname{Coker} dP_A \cong \operatorname{Coker}(\bar{\partial} : \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, \nu) \to \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, \nu)) .$$

Comme il s'agit d'une courbe,

$$0 \to \mathscr{O}(\nu) \to \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, \nu) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, \nu) \to 0$$

est une résolution (flasque) du faisceau $\mathscr{O}(\nu)$ des sections holomorphes de ν et

$$\operatorname{Coker} \bar{\partial} \cong H^1(\mathbf{P}^1, \nu) .$$

Maintenant, on sait que

$$\nu = (n-1)\,\mathscr{O}(1)$$

et

$$\begin{aligned} h^1(\mathbf{P}^1, \nu) &= h^0(\mathbf{P}^1, \nu^* \otimes K) = (n-1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}(-1) \otimes \mathscr{O}(-2)) \\ &= (n-1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}(-3)) = 0 . \end{aligned}$$

□

RÉFÉRENCES

[1] AUDIN, M. Sommes connexes de variétés symplectiques ou presque complexes. *Séminaire de Géométrie,* Montpellier, 1989-90.

[2] BARTH, W., C. PETERS and A. VAN DE VEN. *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik, Springer, 1984.

[3] GROMOV, M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math. 82* (1985), 307-347.

[4] EHRESMANN, C. Sur les variétés presque complexes. *Proceedings Int. Cong. Math., Cambridge* (1950), 412-419.

[5] KAROUBI, M. *K-theory, an introduction.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 226, Springer, 1978.

[6] MCDUFF, D. Communication privée, 1986.

[7] —— Examples of symplectic structures. *Invent. Math. 89* (1987), 13-36.

[8] —— Rational and ruled symplectic 4-manifolds. Prépublication, 1989.

[9] —— Symplectic manifolds with contact type boundaries. Prépublication, 1990.

[10] MECKERT, C. Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire. *Ann. Inst. Fourier 32* (1982), 251-260.

[11] WEINSTEIN, A. Contact surgery and symplectic handlebodies. Preprint, 1990.

[12] WU, W.-T. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques.* Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1952.

(Reçu le 1er novembre 1990)

Michèle Audin

Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex (France)