L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 201-212

COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

RÉSUMÉ. On montre que toute triangulation d'une surface compacte à courbure négative ou nulle est rendue géodésique par minimisation de l'énergie et un résultat analogue pour les polygones convexes du plan. On obtient ainsi des analogues discrets naturels de théorèmes connus pour les applications harmoniques de surfaces (Kneser-Choquet, Jost-Schoen) et une extension de résultats de Tutte.

Etant donnée une surface compacte X munie d'une métrique riemannienne g, on appelle *triangulation* (topologique) de X, la donnée d'un *complexe simplicial* X_0, d'un homéomorphisme Φ_0 de X_0 sur X dont la restriction φ_0 au 1-squelette Γ_0 de X_0 soit un plongement C^1-par morceaux. On dira que la *triangulation est géodésique* si les images des arêtes de Γ_0 par φ_0 sont des arcs de géodésiques pour la métrique g.

Le problème que nous étudions est le suivant: peut-on déformer une triangulation d'une surface de façon à la rendre géodésique?

La réponse est connue dans le cas euclidien par Fary [FY], Tutte [TU]. La méthode employée par Tutte est proche de la nôtre mais utilise directement le critère de planarité de Kuratowski. Un argument global de courbure totale (Gauss-Bonnet) associé à une étude complète des problèmes de dégénérescence permet de donner une méthode géométrique directe qui marche sous la seule hypothèse de courbure $\leqslant 0$. L'idée est de considérer chaque arête comme un élastique avec une constante de couplage arbitraire: la position d'équilibre, minimum de l'énergie potentielle, de ce filet élastique donne une solution.

Si on note A l'ensemble des arêtes de Γ_0 et qu'on introduit, sur chaque arête $(i,j) \in A$, un paramètre $s \in [0,1]$, on note, pour toute application $\varphi : \Gamma_0 \to X$, et pour tout $c = (c_{i,j}) \in (\mathbf{R}^+ \backslash 0)^A$, $E_c(\varphi)$ l'énergie de φ donnée par:

Mots clés: triangulation, calcul des variations.

Codes AMS: 05C10, 53C22, 57M20, 57R05, 57R40, 58E10, 58E20.