Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?

Autor: de Verdière, Yves Colin

Kapitel: 1. Preuve du théorème 1

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58738

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ce dernier théorème contient comme cas particulier un résultat de Tutte ([TU]) concernant le cas euclidien: il considère le plongement barycentrique qui correspond au cas où tous les $c_{i,j}$ valent 1.

Les résultats précédents sont des analogues discrets des théorèmes de Kneser-Choquet ([CH], [KN]) pour le cas des polygones et Jost-Schoen ([J-S]) pour les surfaces compactes.

Nous avons été motivé au départ par le problème rencontré dans [CV2] de construire des systèmes d'angles cohérents pour une triangulation. Les théorèmes précédents donnent une construction directe de tels systèmes.

Questions. Il serait intéressant de comprendre directement le cas de la sphère où le minimum de l'énergie est obtenu pour φ constante: toute triangulation y est homotope à une application constante; il est probable qu'il y a dans ce cas des minimas locaux qui donnent lieu à des triangulations géodésiques.

Le cas des graphes infinis doit pouvoir être traité de façon analogue en considérant des applications d'énergie minimale avec une condition de Dirichlet à l'infini (voir à ce sujet [TO1] et [TO2]).

Nos théorèmes donnent immédiatement l'existence de plongements géodésiques de tout sous-graphe d'une triangulation, par exemple un graphe 2-cellulaire, i.e. dont les composantes connexes du complémentaire sont des disques.

Il serait souhaitable de comprendre quelles sont les configurations possibles d'une application φ d'énergie minimale dans une classe d'homotopie contenant un plongement: une telle application peut ne pas être un plongement. Y-a-t-il alors pour l'image du graphe par φ d'autres possibilités que d'être un point ou une géodésique fermée (cas d'une triangulation d'un petit voisinage tubulaire d'une telle géodésique)?

1. Preuve du théorème 1

Pour prouver l'existence, il suffit d'adapter une preuve de l'existence de géodésiques périodiques dans toute classe d'homotopie d'applications du cercle S^1 dans X ([KG] p. 35).

On peut aisément définir l'espace de Sobolev $H^1(\Gamma_0, X)$, qui est le sous-espace des applications continues de Γ_0 dans X, formé des applications dont la restriction à chaque arête (i,j) est d'énergie $\int_0^1 \| \dot{\varphi}_{i,j}(s) \|^2 ds$ finie. Les classes d'homotopie sont alors des fermés de cet espace.

Montrons que la fonctionnelle E_c atteint son minimum sur $H^1(\Gamma_0, X)$: cela résulte classiquement de la compacité des ensembles $E_c \leqslant M$ pour la topologie de la convergence uniforme (Ascoli: $d(\varphi_{i,j}(s), \varphi_{i,j}(s')) \leqslant C^{te}.\sqrt{|s'-s|}$) et de la semi-continuité inférieure de E_c pour cette topologie.

Si on a 2 solutions, soient φ_1 et φ_2, on peut rendre l'homotopie entre elles géodésique, au sens que pour chaque t, la restriction de φ_t aux arêtes de Γ_0 est géodésique et que, pour tout sommet i de Γ_0, l'application $t \to \varphi_t(i)$ est géodésique. $E_c(\varphi_t)$ est alors convexe pour $t \in [1,2]$ dès que la courbure de X est $\leqslant 0$; en effet, si $V_{i,j} = \dfrac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t}$, $T = \dfrac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial s}$ et K_g est la courbure sectionnelle, on a la formule de variation seconde:

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} = \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 (\| \nabla_T V_{i,j} \|^2 - K_g(\varphi_{i,j}(s)) \, | (V_{i,j})_{norm} |^2) \, ds ,$$

où $(V_{i,j})_{norm}$ est la composante normale à T de $V_{i,j}$.

On en déduit que $E_c(\varphi_t)$ est constante, ainsi que les longueurs des images par φ_t des arêtes de Γ_0 (somme constante de fonctions convexes), puis le résultat annoncé: la distance entre 2 points parcourant à vitesse constante 2 géodésiques ne pouvant être constante que si la région balayée est plate et les 2 géodésiques *parallèles* et parcourues à la même vitesse.

Remarquons aussi que les extrémas de E_c sont caractérisés par le fait que les $\varphi_{i,j}$ sont des arcs géodésiques paramétrés proportionnellement à la longueur et qu'on a

$$\forall i , \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \dot{\varphi}_{i,j}(0) = 0 ,$$

où $\varphi_{i,j}$ est supposée telle que $\varphi_{i,j}(0) = \varphi(i)$.

2. Preuve du théorème 2

Dans ce §, φ est donnée minimisant E_c dans la classe d'homotopie de φ_0. Pour tout triangle T de X_0, la restriction de φ au bord de T est homotope à 0 et donc se relève en un $\tilde{\varphi}$ dans le revêtement universel $\tilde{X}$ de X, unique à automorphisme près du revêtement. L'image $\tilde{\varphi}(\partial T)$ est le bord d'un triangle T_φ (éventuellement dégénéré) de $\tilde{X}$. On prolonge φ à X_0 en Φ de façon que, pour tout triangle T, on ait $\Phi(T) = \pi(T_\varphi)$, où π est la projection canonique