Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN
Autor: Brägger, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59490

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN

von Walter BRÄGGER [1]

1. EINLEITUNG

Sei G die Sphäre S^2 oder die euklidische Ebene $\mathbf{E}$ mit der üblichen Metrik. Eine Familie abgeschlossener Kreisscheiben in G nennen wir eine Kreispackung, wenn je zwei dieser Kreisscheiben keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Einer Kreispackung können wir einen simplizialen 1-Komplex zuordnen. Wir nehmen als Eckpunkte (0-Simplices) die Mittelpunkte der Kreisscheiben und als Kanten (1-Simplices) die geodätischen Verbindungslinien der Mittelpunkte tangenter Kreisscheiben. Diesen 1-Komplex nennen wir den Graphen der Kreispackung. Im weiteren wollen wir nur solche Kreispackungen betrachten, deren Graphen 1-Skelette von endlichen Triangulierungen sind (siehe Fig. 1). Seien K_1 und K_2 zwei simpliziale 1-Komplexe, f eine Bijektion zwischen den Mengen der Eckpunkte und g eine Bijektion zwischen den Kantenmengen der beiden Komplexe. Das Paar (f, g) nennen wir eine kombinatorische Äquivalenz, wenn die Bilder zweier durch eine Kante k verbundener Eckpunkte, durch die Bildkante von k verbunden sind. Die 1-Skelette zweier Triangulierungen T_1 und T_2 nennen wir kombinatorisch äquivalent, wenn es eine kombinatorische Äquivalenz ihrer Eckpunkte- und Kantenmenge gibt. Es gilt der folgende Satz von Andreev. Die hier zitierte Form mittels Kreispackungen stammt von Thurston (vgl. [An] und [Tu]:

SATZ VON ANDREEV. *Sei T eine Triangulierung der Sphäre S^2, dann existiert bis auf Möbiustransformation genau eine Kreispackung, deren Graph kombinatorisch äquivalent zum 1-Skelett von T ist.*

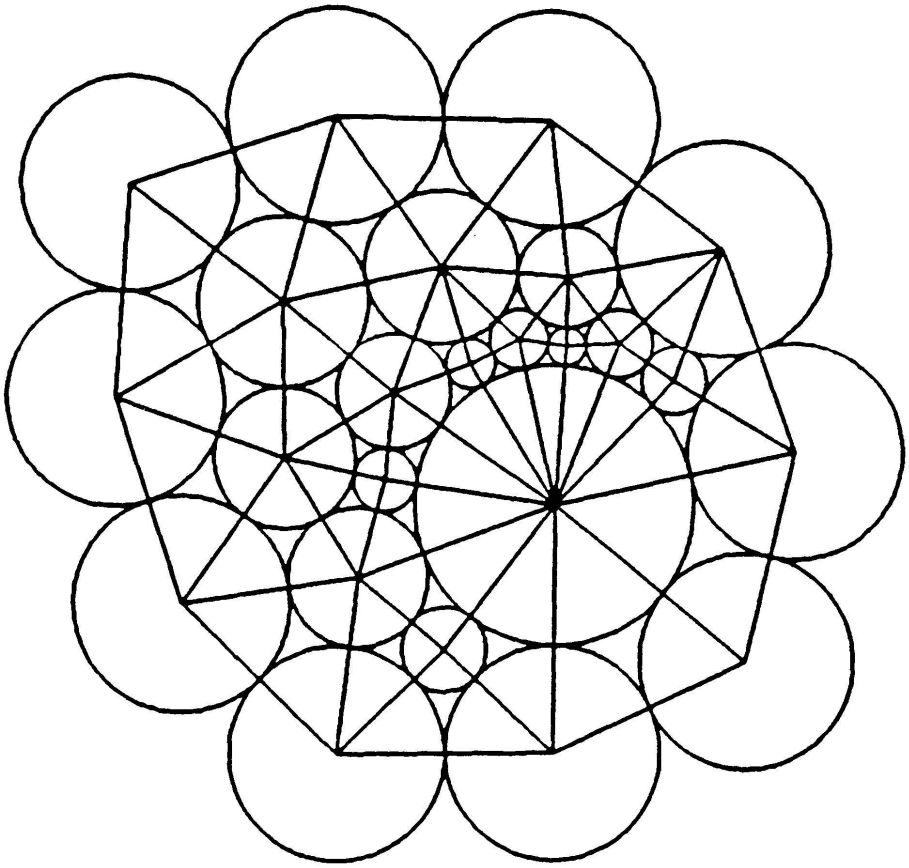
Yves Colin de Verdière hat bewiesen (siehe [CV1]), dass eine Kreispackung wie im Satz von Andreev dem Minimum eines konvexen, eigentlichen Funktionals auf $\mathbf{R}^E$ (E = Eckpunktmenge von T) entspricht. Diese Funktionale sind als Integrale über geschlossene Differentialformen gegeben.

---

[1] Diplomarbeit bei Prof. Dr. Norbert A'Campo. Für seine Hilfe möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Untersucht man diese Funktionale, stösst man rasch auf die Lobachevsky-Funktion und damit auf das Volumen hyperbolischer 3-Simplices.

Im folgenden wollen wir den Satz von Andreev beweisen, indem wir Kreispackungen als Maxima konkaver Funktionale auf $W = [0, \pi]^S$ (S = Sektorenmenge von T) interpretieren.



FIGUR 1

Beispiel einer Kreispackung

2. VORBEREITUNGEN

2.1. Sei P ein Polyeder, dessen Standard-Realisierung $|P|$ in $\mathbf{R}^E$ homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Seien $E = E(P)$, $K = K(P)$, $\Delta = \Delta(P)$ die Mengen aller *Eckpunkte* (0-Simplices), *Kanten* (1-Simplices) und *Dreiecke* (2-Simplices) von P. Jedes 2-Simplex hat drei Winkelsektoren, im folgenden

Sektoren genannt. Sei $S = S(P)$ die Menge der Sektoren aller Dreiecke von P. Für $d \in \Delta, s \in S$ und $e \in E$ definieren wir noch die Inzidenzzahlen

$$(d, s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn der Sektor } s \text{ im Dreieck } d \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(e, s) := \begin{cases} 1 & \text{wenn der Sektor } s \text{ an die Ecke } e \text{ stösst} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Wir nennen $k \in K$ eine *Randkante*, wenn k nur in einem Dreieck enthalten ist, sonst eine *innere Kante*. Sei K_{Rand} die Menge der Rand- und K_{In} jene der inneren Kanten. Entsprechend nennen wir diejenigen Eckpunkte, welche in einer Randkante liegen, *Randecken*, die restlichen *innere Eckpunkte*. Seien $E_{\text{Rand}} \subset E$ und $E_{\text{In}} \subset E$ die Mengen der Rand- bzw. inneren Eckpunkte.

Ein Polyeder P wie oben definiert eine topologische Triangulierung der Kreisscheibe. Jede solche Triangulierung können wir aber auch geradlinig realisieren. Es gilt der folgende Satz (siehe [Fa]):

SATZ VON FARY. *Zu jeder topologischen Triangulierung T der Kreisscheibe gibt es eine geodätische Triangulierung T' eines Polygons in* $\mathbf{E}$, *so dass die 1-Skelette von T und T' kombinatorisch äquivalent sind.*

2.2. Für ein Polyeder P mit $|P|$ homöomorph zur Kreisscheibe sei $W = [0, \pi]^S$ der Raum der Abbildungen $\psi : S \mapsto [0, \pi]$. Damit ist W eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbf{R}^S$.

Wir betrachten eine Realisierung von P, wie im Satz von Fary, und bezeichnen den Winkel des Sektors s in dieser Realisierung mit $\psi(s)$. Dann ist die Abbildung $s \mapsto \psi(s)$ ein Element von W mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\sum_{s \in S} (d, s)\psi(s) = \pi , \qquad \forall d \in \Delta \\ &\sum_{s \in S} (e, s)\psi(s) = 2\pi , \qquad \forall e \in E_{\text{In}} . \end{aligned}$$

Erfüllt ein $\psi \in W$ das Gleichungssystem (1), nennen wir ψ ein *kohärentes Winkelsystem*. Sei W_{Koh} die Menge dieser Winkelsysteme. Die Räume W und W_{Koh} sind kompakte, konvexe Teilmengen von $\mathbf{R}^S$. Wir bezeichnen mit $\mathring{W}_{\text{Koh}} = W_{\text{Koh}} \cap (0, \pi)^S$ die Menge der inneren Punkte der Menge W_{Koh}. Nach dem Satz von Fary ist $\mathring{W}_{\text{Koh}}$ nicht leer. Wir zeigen nun, dass das Gleichungssystem (1) linear unabhängig ist. Die konvexe Menge W_{Koh} hat demnach die Dimension $\#S - \#\Delta - \#E_{\text{In}} = 2(\#\Delta) - \#E_{\text{In}} = -1 + \#K$. Dabei folgt die letzte Gleichheit etwa mit Induktion über die Anzahl Dreiecke.

Für $d \in \Delta$ ist die Abbildung $s \mapsto (d, s)$ ein Element von $\mathbf{R}^S$. Wir bezeichnen es mit $(d, \cdot)$. Analog definieren wir $(e, \cdot) \in \mathbf{R}^S$.

2.3. LEMMA. *Die linear Hülle von* $\{(d, \cdot), (e, \cdot) \mid e \in E, d \in \Delta\}$ *im Vektorraum* $\mathbf{R}^S$ *hat die Dimension* $\#\Delta + \#E - 1$.

Beweis. Sei

$$\sum_{d \in \Delta} a_d(d, \cdot) - \sum_{e \in E} b_e(e, \cdot) = 0 \tag{2}$$

eine Relation. Wir zeigen, dass alle Koeffizienten dieser Relation gleich gross sind. Sei d ein Dreieck von P und e eine Ecke, welche in d enthalten ist. Dann gibt es genau einen Sektor s mit $(e, s) = (d, s) = 1$. Für alle Eckpunkte $e' \neq e$ und Dreiecke $d' \neq d$ gilt $(e', s) = (d', s) = 0$. Testen wir (2) mit s folgt $a_d = b_e$. Seien nun e und e' zwei Eckpunkte, welche mit einer Kante $k \in K$ verbunden sind. Dann gibt es ein Dreieck $d \in \Delta$, so dass k in d enthalten ist. Es folgt $b_e = a_d = b_{e'}$. Da sich nun zwei beliebige Eckpunkte e und e' durch einen Kantenzug verbinden lassen, muss für alle Eckpunktpaare e und e' gelten $b_e = b_{e'}$. Ebenso folgt für beliebige $d \in \Delta$ und $e \in E$ die Gleichheit $a_d = b_e$.

Bezeichnen wir mit 1_S die konstante Funktion, welche jeden Sektor $s \in S$ auf $1 \in \mathbf{R}$ abbildet, so gilt

$$1_S = \sum_{d \in \Delta} (d, \cdot) = \sum_{e \in E} (e, \cdot)$$

und die Relation (2) ist also proportional zur Relation

$$\sum_{d \in \Delta} (d, \cdot) - \sum_{e \in E} (e, \cdot) = 0 . \qquad \square$$

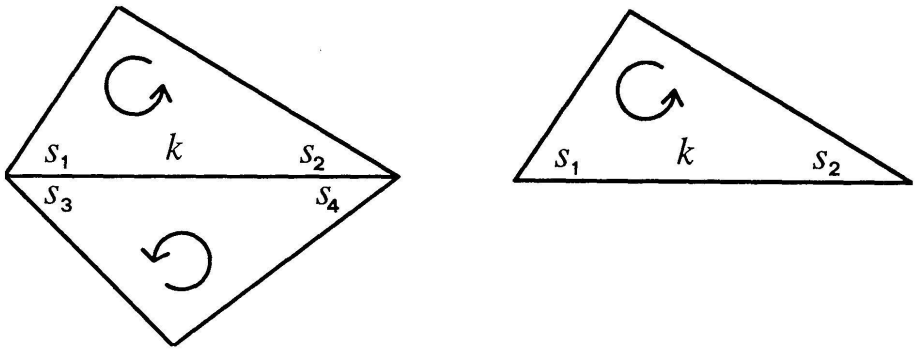
Da für jedes Polyeder E_{Rand} nicht leer ist, ist das System $\{(d, \cdot), (e, \cdot) \mid e \in E_{\text{In}}, d \in \Delta\}$ linear unabhängig und wir erhalten:

2.4. PROPOSITION. *Das Gleichungssystem (1) ist linear unabhängig.*

Als Lösungsraum linearer Gleichungen ist W_{Koh} konvex und für jeden inneren Punkt ψ ist der Tangentialraum $T_\psi W_{\text{Koh}}$ somit unabhängig von ψ. Es gilt

$$T_\psi W_{\text{Koh}} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{s \in S} (d, s) v(s) = 0, & \forall d \in \Delta \\ \text{und} & \\ \sum_{s \in S} (e, s) v(s) = 0, & \forall e \in E_{\text{In}} \end{array} \right\} \tag{3}$$

Wählen wir auf $|P|$ eine Orientierung, so induziert diese eine Orientierung auf jedem Dreieck von $|P|$. Sei nun k eine Kante mit den anliegenden Sektoren s_1, s_2, s_3 und s_4, so dass bezüglich der Orientierung von $|P|$ die Numerierung wie in Figur 2 vorliegt.



FIGUR 2

Numerierung für eine innere Kante und eine Randkante

Für $k \in K_{\text{In}}$ sei $t_k \in T_\psi W_{\text{Koh}}$ der Vektor

$$t_k(s) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } s = s_1 \text{ oder } s = s_4 \\ 1 & \text{wenn } s = s_3 \text{ oder } s = s_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $k \in K_{\text{Rand}}$ sei $t_k \in T_\psi W_{\text{Koh}}$ der Vektor

$$t_k(s) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } s = s_1 \\ 1 & \text{wenn } s = s_2 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

2.5. LEMMA. *Das System* $\{t_k \mid k \in K\}$ *hat den Rang* $-1 + \#K$.

Beweis. Sei

$$\sum_{k \in K} a_k t_k = 0$$

eine Relation und seien $k, k' \in K$ die beiden Schenkel eines Sektors s. Dann gilt

$$0 = \left(\sum_{k \in K} a_k t_k \right)(s) = \pm (a_k - a_{k'}) .$$

Testen wir so mit allen Sektoren sehen wir, dass $\sum_{k \in K} t_k = 0$ die einzige lineare Relation des Systems $\{t_k \mid k \in K\}$ ist. $\square$

Der Raum $T_\psi W_{\text{Koh}}$ hat die Dimension $-1 + \#K$. Nach Lemma 2.5. folgt:

2.6. PROPOSITION. *Die Vektoren* t_k *spannen den Tangentialraum* $T_\psi W_{\text{Koh}}$ *auf.*

2.7. Ist e ein Eckpunkt von P, so verstehen wir unter der *Blume* von e die Vereinigung aller Dreiecke $d \in \Delta$, welche e als Eckpunkt enthalten.

Sei $G = G(P)$ die Menge der Abbildungen $g: |P| \mapsto \mathbf{E}$ (wobei $\mathbf{E}$ die euklidische Ebene bedeute und $|P|$ die Standard-Realisierung von P), die folgende Eigenschaften erfüllen:

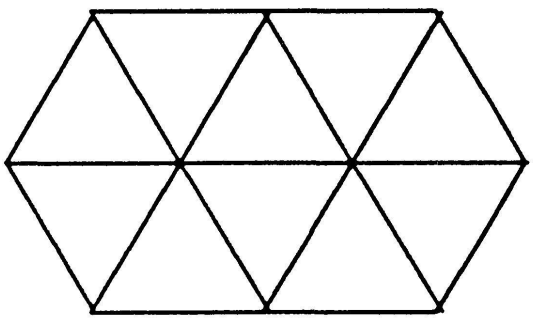
- g ist affin auf jedem Dreieck von $|P|$,
- g ist injektiv auf jeder Blume von $|P|$.

Jedes $g \in G$ liefert uns eine Abbildung $\psi: S \to [0, \pi]$ wenn wir jedem Sektor seinen Winkel in $g(|P|) \subset \mathbf{E}$ zuordnen. Da g injektiv auf jeder Blume ist, ist ψ sogar kohärent, also in W_{Koh}. Wir haben so eine „Winkelablesefunktion"

$$A: G \mapsto W_{\text{Koh}}.$$

Ein Winkelsystem $\psi \in A(G)$ nennen wir *geometrisch realisierbar* und die Teilmenge von W_{Koh}, mit dieser Eigenschaft, W_{Geo}. Für $\psi \in W_{\text{Geo}}$ bezeichnen wir mit $g_\psi: |P| \mapsto \mathbf{E}$ eine geometrische Realisierung des Winkelsystems ψ und mit $P_\psi \subset \mathbf{E}$ das Bild von g_ψ.

Eine Realisierung, wie im Satz von Fary, liefert ein $\psi \in W_{\text{Koh}}$, welches sogar in W_{Geo} liegt. Darum ist auch W_{Geo} nicht leer. Nicht jedes $\psi \in \mathring{W}_{\text{Koh}}$ liegt aber in W_{Geo}. Betrachten wir in $\mathbf{E}$ etwa die Triangulierung von Figur 3. Neun dieser gleichseitigen Dreiecke bestimmen das zehnte Dreieck vollständig. Ist ψ das Winkelsystem dieser Triangulierung und k eine Kante, so liegt $\psi + \varepsilon t_k$ nur für $\varepsilon = 0$ in W_{Geo}.



FIGUR 3

Für jede Kante führt die „Scherung" t_k aus W_{Geo} hinaus

Wir haben in $\mathbf{R}^S$ nun drei Mengen $W \supset W_{\text{Koh}} \supset W_{\text{Geo}}$ definiert. Die Menge W_{Geo} sitzt als Teilmenge kompliziert in W_{Koh}. Wir kennen für W_{Geo} keine direkte Beschreibung. Im nächsten Paragraphen definieren wir auf W eine Funktion L. Es zeigt sich, dass die Einschränkung von L auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt in $\mathring{W}_{\text{Koh}}$ hat. Dieser liegt auch in W_{Geo} und das 1-Skelett seiner geometrischen Realisierung entspricht dem Graphen einer Kreispackung.

3. Die Funktion $L: W \to \mathbf{R}$

3.1. Wir definieren für $\psi \in W$

$$L(\psi) = -2 \sum_{s \in S} \left(\int_0^{\psi(s)/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \right). \tag{4}$$

Die so definierte Funktion $L: W \mapsto \mathbf{R}$ ist auf W stetig und auf $\mathring{W}$ analytisch.

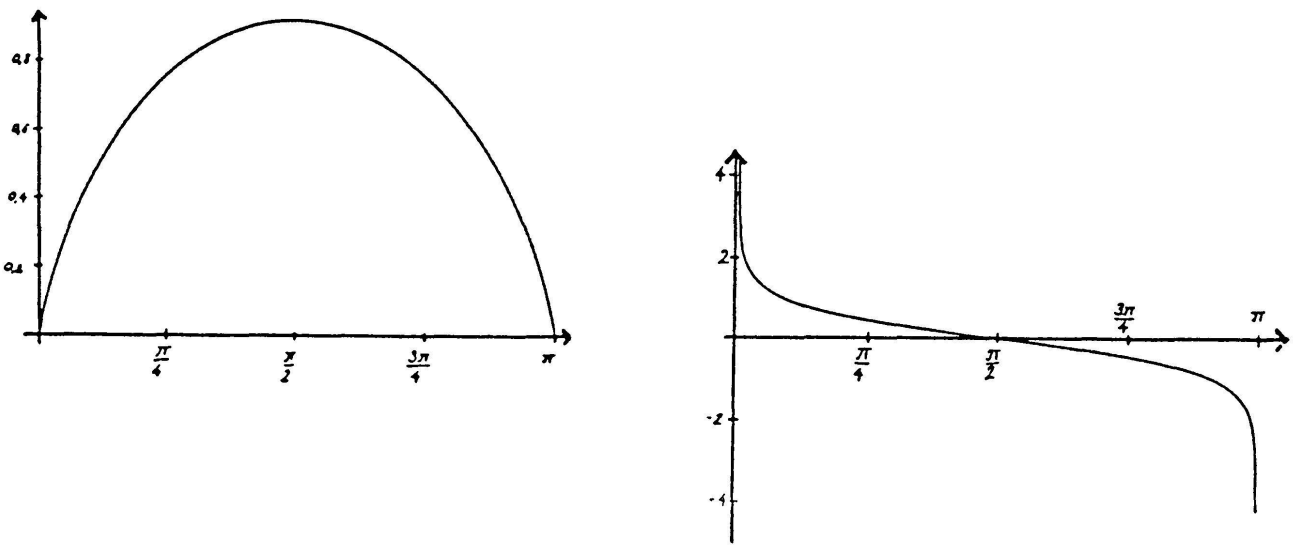
Es sei bemerkt, dass sich das Integral

$$I(\alpha) := -\int_0^{\alpha/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

mit der Lobatchevsky-Funktion $\mathscr{L}: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ausdrücken lässt. Sei $\mathscr{L}(\delta) := -\int_0^{\delta} \log |2 \sin \vartheta| \, d\vartheta$, dann gilt

$$I(\delta) = \mathscr{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right).$$

Mit der Lobatchevsky-Funktion kann man das Volumen hyperbolischer 3-Simplices aus deren Keilwinkel bestimmen. Darum hat auch $I(\delta)$ und $L|_{W_{\text{Koh}}}$ eine geometrische Bedeutung im hyperbolischen 3-Raum $\mathbf{H}^3$. In 3.2. ordnen wir jedem Winkelsystem $\psi \in W_{\text{Koh}}$ eine Figur in $\mathbf{H}^3$ so zu, dass $L(\psi)$ dem Volumen dieser Figur entspricht. Diese geometrische Interpretation von $L|_{W_{\text{Koh}}}$ wird zum nackten Beweis des Satzes von Andeev jedoch nicht verwendet.



FIGUR 4

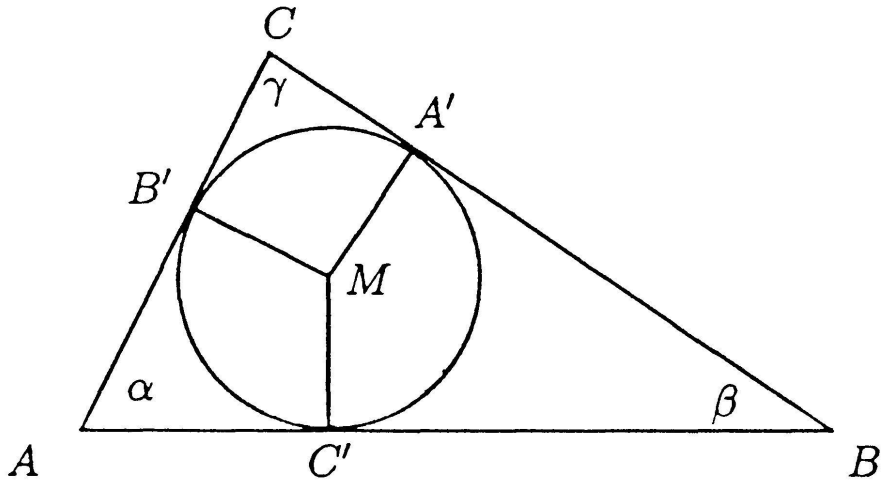
Die Funktionen $I\colon [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$ und $\dfrac{d}{d\alpha} I(\alpha)\colon (0, \pi) \mapsto \mathbf{R}$

3.2. Sei Ω_δ, $\delta \in (0, \pi)$ ein idealer 3-Simplex im hyperbolischen 3-Raum mit den Keilwinkeln $\delta/2$, $(\pi - \delta)/2$ und $\pi/2$. Dann gilt (vgl. hierzu [Mi]):

$$Vol_{\mathrm{Hyp}}(\Omega_\delta) = \mathscr{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right) = I(\delta)\ .$$

Für ein euklidisches Dreieck d mit den Winkeln α, β, γ konstruieren wir in $\mathbf{H}^3$ eine Figur $\lambda(d)$ folgendermassen:

Wir wählen für $\mathbf{H}^3$ das Model $\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$ und schreiben $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Seien A, B, C die Eckpunkte von $d \subset \mathbf{C}$, M der Mittelpunkt des Inkreises und A', B', C' die Fusspunkte der Lote von M auf die Seiten von d (siehe Figur 5).



FIGUR 5

Zerlegung eines Dreiecks

Die Menge $\lambda(d)$ ist die konvexe Hülle in $\mathbf{H}^3$ der Punkte $A, B, C, M, A', B', C', \infty$. Sie zerlegt sich in 6 Simplices und zwar je zwei Kopien $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma$. Somit gilt für $\psi \in \overset{\circ}{W}_{\mathrm{Koh}}$

$$L(\psi) = \sum_{d \in \Delta} Vol_{\mathrm{Hyp}}(\lambda(d_\psi)) ,$$

wobei $d_\psi \subset \mathbf{C}$ eine Realisierung von d ist, deren Winkel ψ entsprechen. Für $\psi \in W$ nicht in W_{Koh} kennen wir keine geometrische Bedeutung für $L(\psi)$.

3.3. Seien φ und ψ zwei verschiedene Randpunkte von W, dann sei

$$[\varphi, \psi] := \{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in [0,1]} \subset W .$$

Wir nennen $[\varphi, \psi]$ **maximal**, wenn $\{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in \mathbf{R}} \cap W = [\varphi, \psi]$.

3.4. LEMMA. *Seien φ und ψ zwei verschiedene Randpunkte von W, so dass $[\varphi, \psi]$ maximal ist. Dann bildet die Funktion*

$$t \mapsto \frac{d}{dt} L(t\varphi + (1-t)\psi)$$

das Intervall $(0, 1)$ homöomorph auf $\mathbf{R}$ ab.

Beweis. Betrachten wir nochmals die Funktion $I: [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$. Für $\alpha \in (0, \pi)$ gilt

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = -\frac{1}{2} \log\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} I(\alpha) = -\frac{1}{2\sin\alpha} .$$

Sei nun $\gamma: [0, 1] \mapsto W$ mit $\gamma(t) := t\varphi + (1-t)\psi$. Dann gilt für $t \in (0, 1)$:

$$\frac{d}{dt} L \circ \gamma = -\sum_{s \in S'} \log\left(\tan\frac{\gamma(t)(s)}{2}\right) ((\varphi - \psi)(s)) \tag{5}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} L \circ \gamma = -\sum_{s \in S'} \frac{(\varphi - \psi)^2(s)}{\sin(\gamma(t)(s))} < 0 , \tag{6}$$

wobei $S' = \{s \in S \mid \varphi(s) \neq \psi(s)\}$ ist. Nach (5) gilt:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)(t)\right) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \to 1} \left(\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)(t)\right) = -\infty .$$

Somit ist $\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)$ surjektiv und wegen (6) streng monoton. $\square$

Für $t = 0$ und $t = 1$ ist $\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)$ in $\mathbf{R}$ nicht definiert. Wegen (7) definieren wir aber

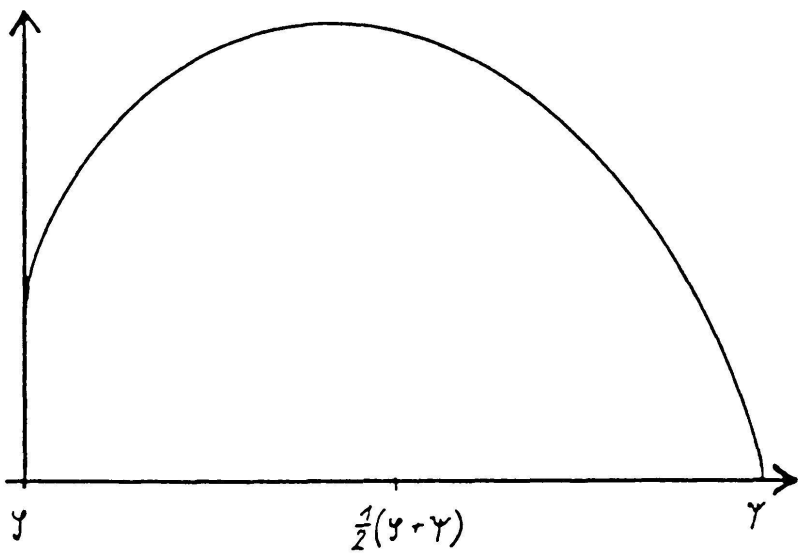
$$\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)\,|_{t=0} = +\infty \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(L \circ \gamma)\,|_{t=1} = -\infty\,.$$

Nach Lemma 3.4. ist die Funktion $L\,|_{[\varphi,\psi]}: [\varphi, \psi] \mapsto \mathbf{R}$ konkav und nimmt in den Randpunkten φ und ψ kein Maximum an. Wir erhalten somit:

3.5. PROPOSITION. *Die Funktion* $L: W \mapsto \mathbf{R}$ *ist auf* W *streng konkav.*

Sei im Folgenden L_{Koh} die Einschränkung von L auf W_{Koh}.

3.6. SATZ. *Die Funktion* $L_{\mathrm{Koh}}: W_{\mathrm{Koh}} \to \mathbf{R}$ *nimmt auf der kompakten Menge* W_{Koh} *genau ein Maximum an. Dieses Maximum liegt in* $\mathring{W}_{\mathrm{Koh}}$ *und ist dort der einzige kritische Punkt.*



FIGUR 6

Die Einschränkung von L auf das Intervall $[\varphi, \psi]$

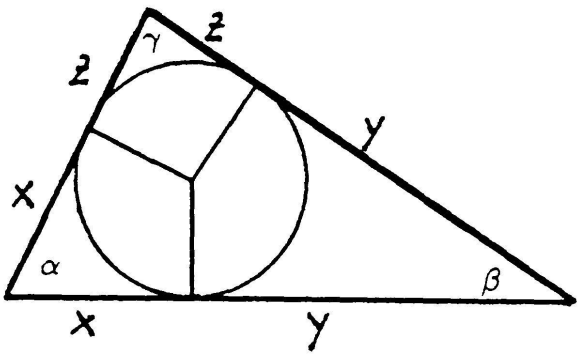
Beweis. Die Teilmenge W_{Koh} von W ist selbst wieder konvex und die Randpunkte von W_{Koh} sind auch Randpunkte von W. Die Behauptung folgt nun nach Lemma 3.4. $\square$

4. Immersierte Kreispackungen

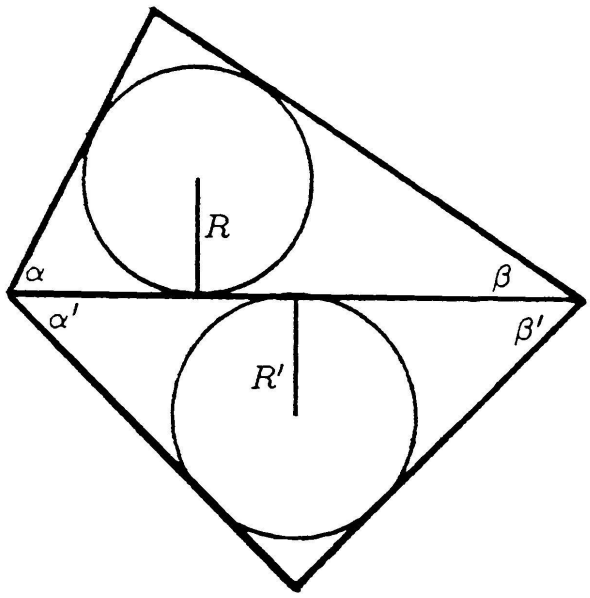
4.1. Satz 3.6. besagt, dass L_{Koh} auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt η annimmt. Da die Vektoren $\{t_k \mid k \in K\}$ den Tangentialraum $T_\eta W_{\mathrm{Koh}}$ aufspannen, ist $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K$. Ist k eine Kante von P und $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ können wir die Blume um k, d.h. die Vereinigung aller Dreiecke in welchen k enthalten ist, geometrisch realisieren.

Bemerkung. Drei Grössen $a, b, c,$ welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, definieren bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Sei $x = (-a+b+c)/2$, $y = (+a-b+c)/2$ und $z = (+a+b-c)/2$. Dann ist $a = y + z$, $b = x + z$, $c = y + x$ und wegen den Dreiecksungleichungen sind x, y und z positiv. Umgekehrt definieren drei positive Grössen x, y und z bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Der Inkreis eines Dreiecks teilt die Seiten gerade im Verhältnis x/y, y/z und z/x (siehe Figur 7).

Sei zuerst $k \in K_{\mathrm{In}}$ eine innere Kante. Realisieren wir die Blume um k in $\mathbf{E}$, erhalten wir zwei Dreiecke d_η und d'_η mit gemeinsamer Kante $|k|$ und den Winkeln α, β, γ bzw. α', β', γ'. Die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η teilen die Kante $|k|$ im Verhältnis x/y und x'/y'. Sind R und R' die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η so folgt (siehe Figur 8):



Figur 7



Figur 8

Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante

$$0 = (DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k)$$
$$= \frac{d}{d\varepsilon} L(\eta + \varepsilon t_k)\,\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \log \tan \frac{\alpha}{2} - \log \tan \frac{\beta}{2} - \log \tan \frac{\alpha'}{2} + \log \tan \frac{\beta'}{2}$$

$$= \log \frac{R}{x} - \log \frac{R}{y} - \log \frac{R'}{x'} + \log \frac{R'}{y'}$$

$$= - \log \frac{x}{y} + \log \frac{x'}{y'},$$

und somit

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

Realisieren wir in **E** die beiden an k anliegenden Dreiecke mit gemeinsamer Kante $|k|$, so ist $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k)$ genau dann null, wenn sich die Inkreise der beiden Dreiecke berühren. Somit ist $x = x', y = y'$ und da $R = x \cdot \tan(\alpha/2)$ gilt für die Inkreise R und R'

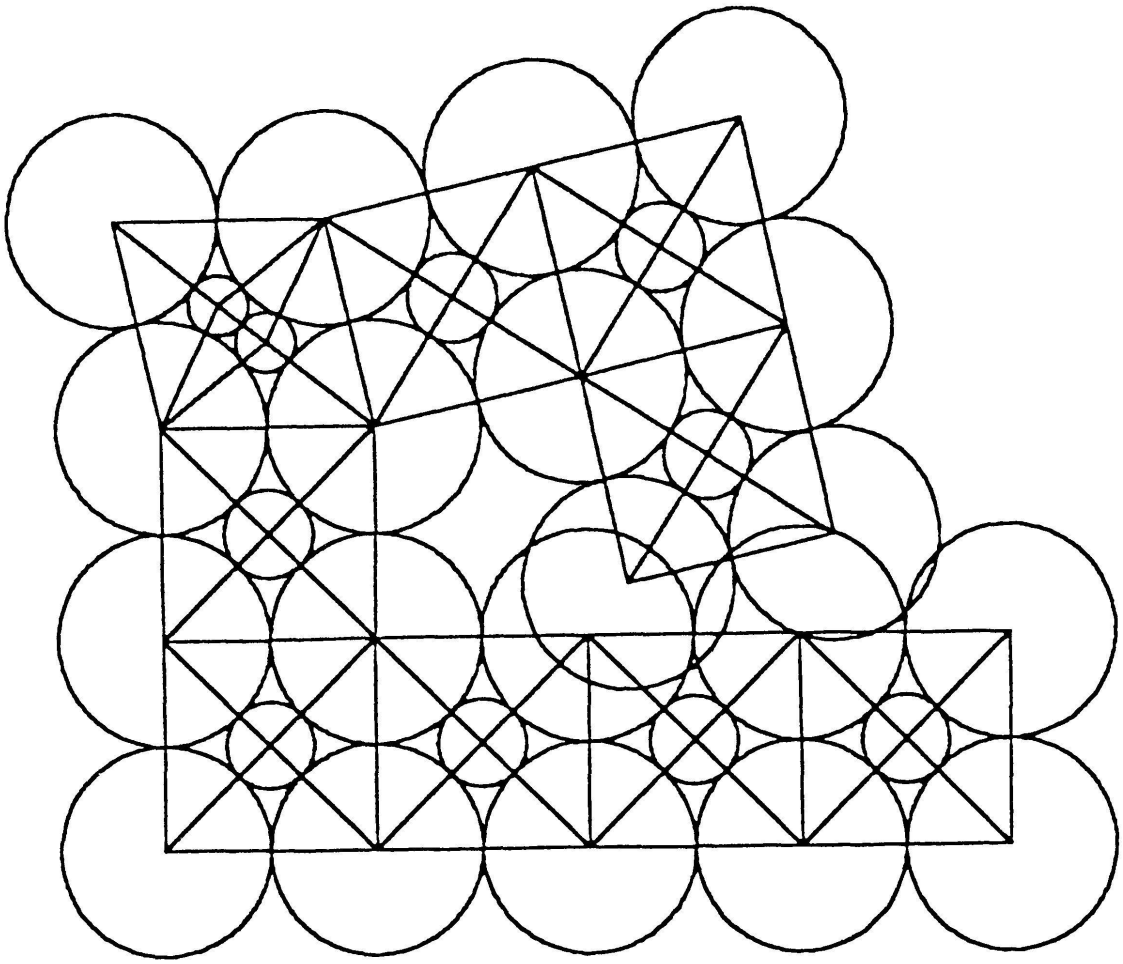
$$\frac{R}{R'} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha'}{2}}.$$

Ist $k \in K_{\mathrm{Rand}}$ eine Randkante, so liegt k nur in einem Dreieck d. Realisieren wir d in **E**, dann teile der Inkreisradius $|k|$ wieder im Verhältnis x/y. Aus $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$ folgt dann $x/y = 1$. Der Inkreis teilt somit $|k|$ im Verhältnis 1:1.

4.2. Wir nennen $\psi \in W_{\mathrm{Koh}}$ eine *immersierte Kreispackung* (siehe Figur 9) wenn ψ in W_{Geo} liegt und folgende Bedingungen erfüllt:

— Um jeden Eckpunkt e von P_ψ (Bezeichnungen wie in 2.7.) lässt sich ein Kreis C_e schlagen, der alle Kanten, die von e ausgehen, schneidet.

— Sind zwei Ecken e und e' durch eine Kante verbunden, so sollen sich die Kreise C_e und $C_{e'}$ berühren.



FIGUR 9

Beispiel einer immersierten Kreispackung

4.3. LEMMA. *Für* $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

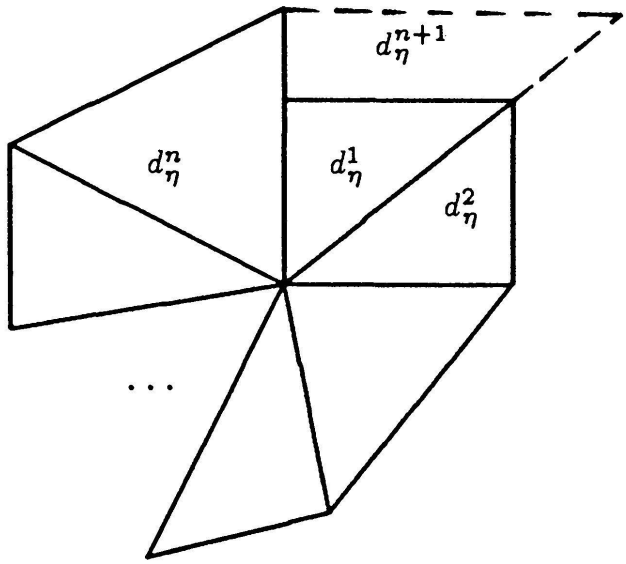
(i) η *ist eine immersierte Kreispackung,*

(ii) $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0, \ \forall k \in K_{\mathrm{In}}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei η eine immersierte Kreispackung. Dann schneiden die Kreise C_e die Seiten der Dreiecke von P_η in den Berührungspunkten der Inkreise. Haben zwei Dreiecke von P_η eine gemeinsame Kante $|k|$, so fallen auf $|k|$ die Berührungspunkte der Inkreise zusammen und es folgt $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei e ein innerer Eckpunkt und seien $d^1, \ldots, d^n$ die Dreiecke der Blume um e wobei d^i und d^{i+1} die Kante k_i gemeinsam haben. Wir realisieren erst d^1 in $\mathbf{E}$. Dann realisieren wir die Dreiecke $d^2, \ldots, d^n$ so, dass d^i_η mit d^{i-1}_η genau die Kante $|k_{i-1}|$ gemeinsam hat.

Sei d_η^{n+1} eine weitere Realisierung von d^1, welche aber mit d_η^n die Kante $|k_n|$ gemeinsam hat. Da die Winkelsumme um jeden Eckpunkt 2π beträgt, haben die Dreiecke d_η^n und d_η^{n+1} keinen inneren Punkt gemeinsam (siehe Figur 10).



FIGUR 10

Die Blume um einen inneren Eckpunkt

Wegen $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_{k_i}) = 0$ berühren sich die Inkreise der Dreiecke d_η^i und d_η^{i+1}. Bezeichnen wir mit R_i den Inkreisradius des Dreiecks d_η^i und mit α_i den Winkel von d_η^i der an die Ecke e stösst, dann folgt

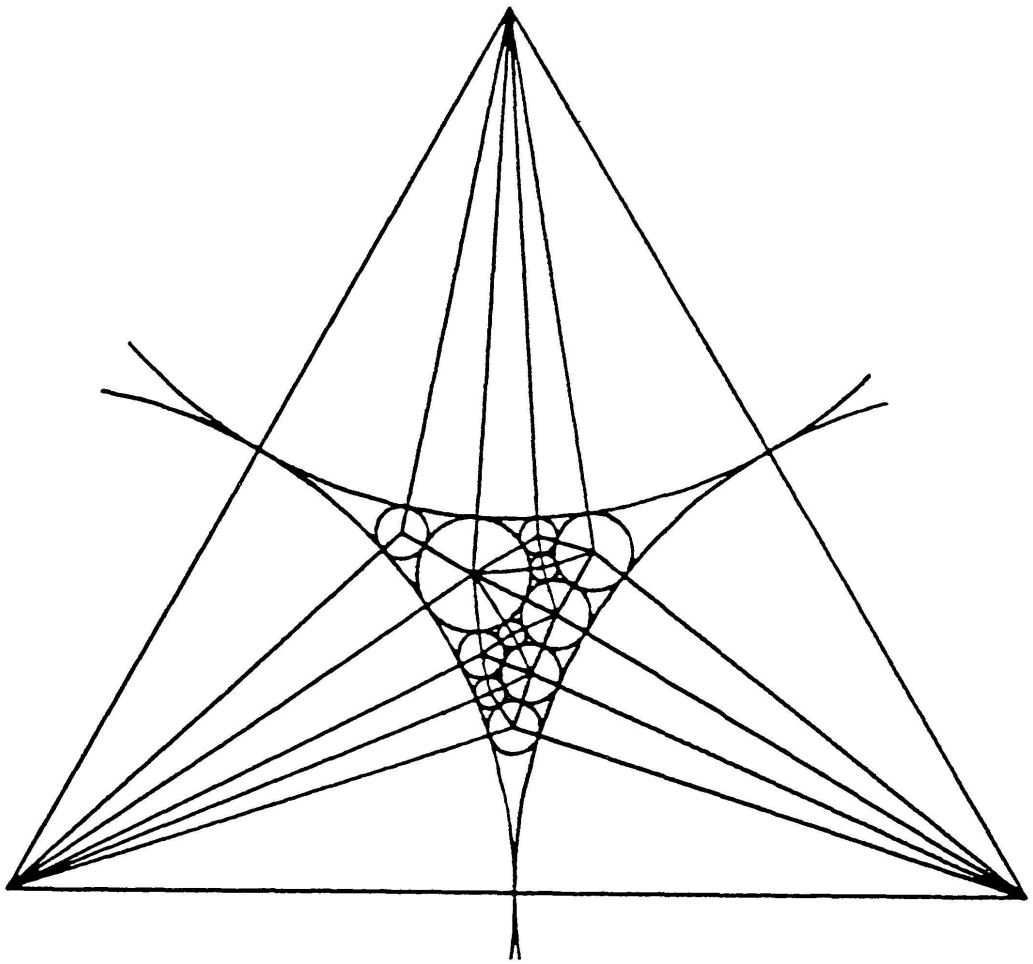
$$\frac{R_1}{R_{n+1}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdots \frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{\tan(\alpha_1/2)}{\tan(\alpha_2/2)} \cdots \frac{\tan(\alpha_n/2)}{\tan(\alpha_1/2)} = 1 .$$

Folglich fallen die Dreiecke d_η^1, d_η^{n+1} zusammen und die Blume um e schliesst sich. Da sich die Blume um jeden inneren Eckpunkt schliesst, ist η immersiert realisierbar. Haben zwei Dreiecke eine gemeinsame Kante, so berühren sich in $P_\eta \subset \mathbf{E}$ ihre Inkreise. Wir können somit um jeden Eckpunkt von P_η einen Kreis schlagen, der die Kanten in den Berührungspunkten der Inkreise schneidet. Diese Kreise erfüllen die Kreispackungseigenschaft 4.2. □

4.4. SATZ. *Für jedes Polyeder P mit $|P|$ homöomorph zur Kreisscheibe existiert genau eine immersierte Kreispackung, bei der alle Randkreise gleich gross sind.*

Beweis. Nimmt L_{Koh} das Maximum auf W_{Koh} in η an, so gilt $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0\ \forall k \in K$, nur für η. Aus $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K_{\mathrm{In}}$ folgt die Kreispackungseigenschaft und wegen $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0\ \forall k \in K_{\mathrm{Rand}}$ sind alle Randkreise gleich gross. □

4.5. BEWEIS DES SATZES VON ANDREEV. Sei T eine Triangulierung der Sphäre S^2 und e_1, e_2, e_3 die Eckpunkte eines Dreiecks von T. Die Gruppe der Möbiustransformationen operiert dreifachtransitiv auf der Sphäre. Mit einer Möbiustransformation und anschliessender stereographischer Projektion können wir e_1, e_2, e_3 auf die Eckpunkte eines gleichseitigen euklidischen Dreiecks so abbilden, dass alle andern Ecken von T im Inneren dieses Dreiecks liegen. Wir erhalten so eine Triangulierung eines gleichseitigen Dreiecks in **E**. Nach Satz 4.4. existiert dann genau eine immersierte Kreispackung, deren Graphen das 1-Skelett einer Triangulierung eines wiederum gleichseitigen Dreieckes ist (alle drei Randkreise haben denselben Radius). Darum ist diese Kreispackung sogar in **E** eingebettet (siehe Figur 11). Transformieren wir auf S^2 zurück erhalten wir eine Kreispackung auf der Sphäre. Die Eindeutigkeit bis auf Möbiustransformation folgt aus der Eindeutigkeit im euklidischen Fall.



FIGUR 11
Kreispackung auf der Sphäre

5. Randwinkel

Sei $\psi \in W_{\text{Koh}}$ und $e \in E_{\text{Rand}}$ eine Randecke. Dann ist

$$\rho(\psi, e) = \sum_{s \in S} (e, s)\psi(s) \geqslant 0$$

der Randwinkel von von ψ an der Ecke e. Es gilt:

$$\sum_{s \in S} \psi(s) = \pi(\#\Delta) = 2\pi(\#E_{\text{In}}) + \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} \rho(\psi, e)$$

Aus $\#\Delta - \#K + \#E = 1$ folgt:

$$-2\pi = \pi(\underbrace{-1 + 2\#\Delta - \#E_{\text{In}}}_{= -1 + \#K} - \#K) = \pi(\#\Delta - \#E - \#E_{\text{In}})$$

$$= \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\rho(\psi, e) - \pi)$$

und somit erhalten wir eine Version von Gauss-Bonnet:

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(\psi, e))$$

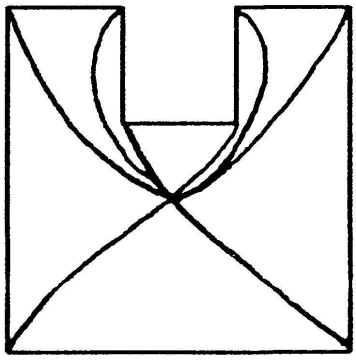
5.1. Polyeder mit festen Randwinkeln. Die Funktion $\rho : E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ ist ein *Randwinkelsystem,* wenn gilt

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(e)) .$$

Ist ρ ein Randwinkelsystem, dann ist

$$W^{\rho}_{\text{Koh}} := \{\psi \in W_{\text{Koh}} \mid \rho(\psi, e) = \rho(e) , \quad \forall e \in E_{\text{Rand}}\} .$$

Obwohl nach dem Satz von Fary die Menge $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$ nicht leer ist, kann $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ durchaus leer sein. Die Triangulation von Figur 12 etwa kann nicht geradlinig realisiert werden, wenn wir die Randwinkel fest lassen.



Figur 12

5.2. SATZ. *Sei* $\rho: E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ *ein Randwinkelsystem und sei* $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ *nicht leer. Dann gibt es genau eine immersierte Kreispackung* $\eta \in W^{\rho}_{\text{Koh}}$. *Das Polyeder* P_η *ist in* $\mathbf{E}$ *eingebettet, wenn* $\rho(e) \leqslant \pi, \forall e \in E_{\text{Rand}}$.

Beweis. Der Raum W^{ρ}_{Koh} ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von W. Für $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ ist sein Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\text{Koh}}$ unabhängig von ψ. Es gilt:

$$(8) \qquad T_\psi W_{\text{Koh}} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{s \in S} (d, s) v(s) = 0, & \forall d \in \Delta \\ \text{und} & \\ \sum_{s \in S} (e, s) v(s) = 0, & \forall e \in E \end{array} \right\}$$

Nach Lemma 2.3. hat W^{ρ}_{Koh} die Dimension $1 + 2\#\Delta - \#E = \#K_{\text{In}}$, wobei die letzte Gleichheit wieder mit Induktion über die Anzahl Dreiecke folgt.

Für jede innere Kante k ist der Vektor t_k Tangentialvektor von W^{ρ}_{Koh}. Nach Lemma 2.5. spannen diese den Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\text{Koh}}$ auf.

Sei L^{ρ}_{Koh} die Einschränkung von L auf W^{ρ}_{Koh}. Dann hat wegen Lemma 3.4. die konkave Funktion L^{ρ}_{Koh} genau einen kritischen Punkt η. Da $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K_{\text{In}}$, ist η wegen Lemma 4.3. eine immersierte Kreispackung. □

LITERATUR

[An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobacevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik 10* (1970), 413-440.

[Cv1] COLIN DE VERDIÈRE, Yves. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones math. 104* (1991), 655-669.

[Cv2] —— Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface. *Enseignement Math. 37* (1991), 201-212.

[Fa] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Scientiarium Mathematicarum (Acta Universitatius Szegedensis) 11* (1946-1948), 229-233.

[Mi] MILNOR, J.W. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. A.M.S. 6* (1982), 9-24.

[Tu] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Princeton Notes (1978), chap. 13.

(Reçu le 18 mars 1991)

Walter Brägger

Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel

vide-leer-empty