Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN
Autor: Brägger, Walter
Kapitel: 3. Die funktion L: W R
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59490

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Wir haben in $\mathbf{R}^S$ nun drei Mengen $W \supset W_{\text{Koh}} \supset W_{\text{Geo}}$ definiert. Die Menge W_{Geo} sitzt als Teilmenge kompliziert in W_{Koh}. Wir kennen für W_{Geo} keine direkte Beschreibung. Im nächsten Paragraphen definieren wir auf W eine Funktion L. Es zeigt sich, dass die Einschränkung von L auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt in $\mathring{W}_{\text{Koh}}$ hat. Dieser liegt auch in W_{Geo} und das 1-Skelett seiner geometrischen Realisierung entspricht dem Graphen einer Kreispackung.

3. Die Funktion $L: W \to \mathbf{R}$

3.1. Wir definieren für $\psi \in W$

$$L(\psi) = -2 \sum_{s \in S} \left(\int_0^{\psi(s)/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \right). \tag{4}$$

Die so definierte Funktion $L: W \mapsto \mathbf{R}$ ist auf W stetig und auf $\mathring{W}$ analytisch.

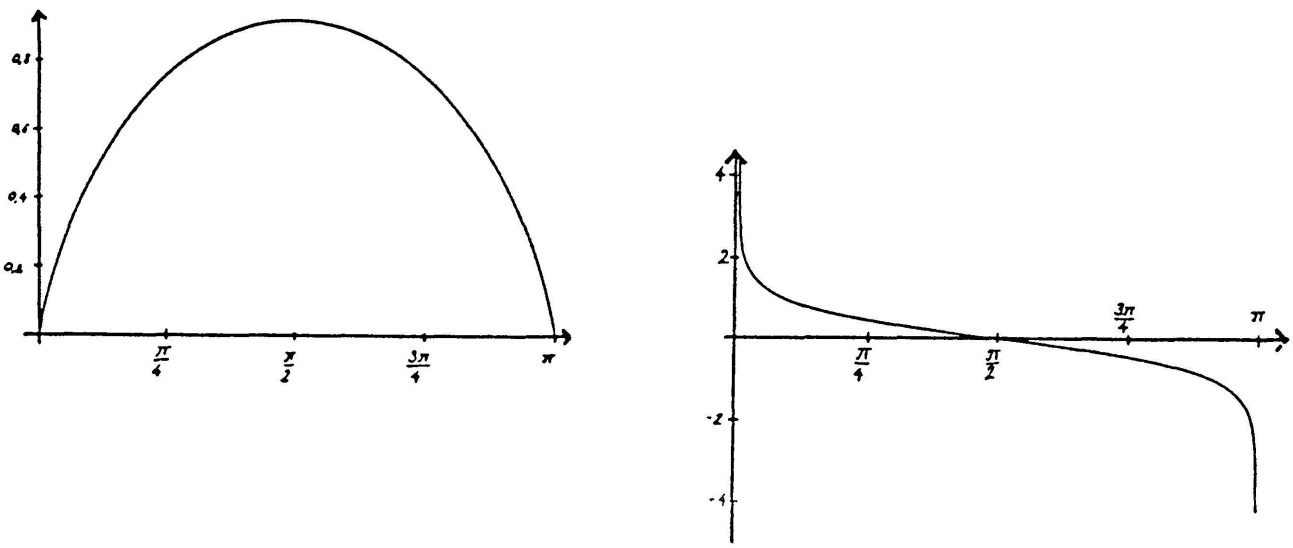
Es sei bemerkt, dass sich das Integral

$$I(\alpha) := -\int_0^{\alpha/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

mit der Lobatchevsky-Funktion $\mathscr{L}: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ausdrücken lässt. Sei $\mathscr{L}(\delta) := -\int_0^{\delta} \log |2 \sin \vartheta| \, d\vartheta$, dann gilt

$$I(\delta) = \mathscr{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right).$$

Mit der Lobatchevsky-Funktion kann man das Volumen hyperbolischer 3-Simplices aus deren Keilwinkel bestimmen. Darum hat auch $I(\delta)$ und $L|_{W_{\text{Koh}}}$ eine geometrische Bedeutung im hyperbolischen 3-Raum $\mathbf{H}^3$. In 3.2. ordnen wir jedem Winkelsystem $\psi \in W_{\text{Koh}}$ eine Figur in $\mathbf{H}^3$ so zu, dass $L(\psi)$ dem Volumen dieser Figur entspricht. Diese geometrische Interpretation von $L|_{W_{\text{Koh}}}$ wird zum nackten Beweis des Satzes von Andeev jedoch nicht verwendet.



FIGUR 4

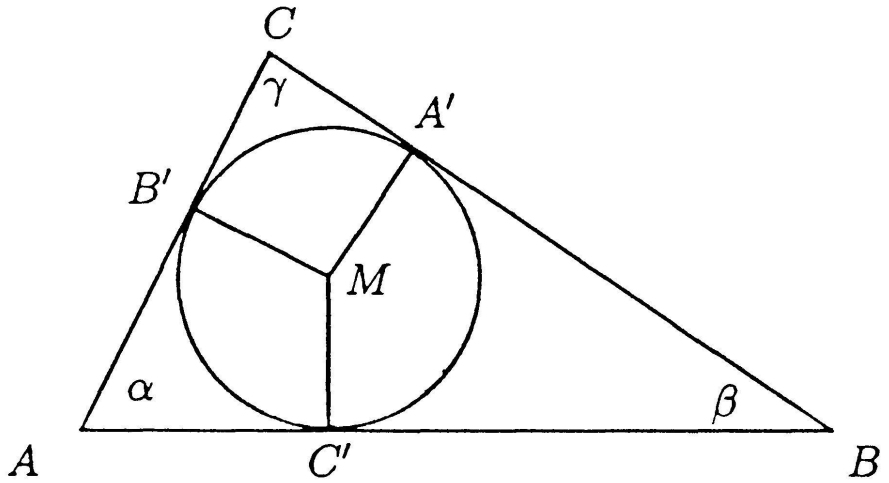
Die Funktionen $I\colon [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$ und $\dfrac{d}{d\alpha} I(\alpha)\colon (0, \pi) \mapsto \mathbf{R}$

3.2. Sei Ω_δ, $\delta \in (0, \pi)$ ein idealer 3-Simplex im hyperbolischen 3-Raum mit den Keilwinkeln $\delta/2$, $(\pi - \delta)/2$ und $\pi/2$. Dann gilt (vgl. hierzu [Mi]):

$$Vol_{\mathrm{Hyp}}(\Omega_\delta) = \mathscr{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right) = I(\delta)\ .$$

Für ein euklidisches Dreieck d mit den Winkeln α, β, γ konstruieren wir in $\mathbf{H}^3$ eine Figur $\lambda(d)$ folgendermassen:

Wir wählen für $\mathbf{H}^3$ das Model $\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$ und schreiben $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Seien A, B, C die Eckpunkte von $d \subset \mathbf{C}$, M der Mittelpunkt des Inkreises und A', B', C' die Fusspunkte der Lote von M auf die Seiten von d (siehe Figur 5).



FIGUR 5

Zerlegung eines Dreiecks

Die Menge $\lambda(d)$ ist die konvexe Hülle in $\mathbf{H}^3$ der Punkte $A, B, C, M, A', B', C', \infty$. Sie zerlegt sich in 6 Simplices und zwar je zwei Kopien $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma$. Somit gilt für $\psi \in \overset{\circ}{W}_{\mathrm{Koh}}$

$$L(\psi) = \sum_{d \in \Delta} Vol_{\mathrm{Hyp}}(\lambda(d_\psi)) ,$$

wobei $d_\psi \subset \mathbf{C}$ eine Realisierung von d ist, deren Winkel ψ entsprechen. Für $\psi \in W$ nicht in W_{Koh} kennen wir keine geometrische Bedeutung für $L(\psi)$.

3.3. Seien φ und ψ zwei verschiedene Randpunkte von W, dann sei

$$[\varphi, \psi] := \{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in [0,1]} \subset W .$$

Wir nennen $[\varphi, \psi]$ **maximal**, wenn $\{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in \mathbf{R}} \cap W = [\varphi, \psi]$.

3.4. LEMMA. *Seien φ und ψ zwei verschiedene Randpunkte von W, so dass $[\varphi, \psi]$ maximal ist. Dann bildet die Funktion*

$$t \mapsto \frac{d}{dt} L(t\varphi + (1-t)\psi)$$

das Intervall $(0, 1)$ homöomorph auf $\mathbf{R}$ ab.

Beweis. Betrachten wir nochmals die Funktion $I: [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$. Für $\alpha \in (0, \pi)$ gilt

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = -\frac{1}{2} \log\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} I(\alpha) = -\frac{1}{2\sin\alpha} .$$

Sei nun $\gamma: [0, 1] \mapsto W$ mit $\gamma(t) := t\varphi + (1-t)\psi$. Dann gilt für $t \in (0, 1)$:

$$\frac{d}{dt} L \circ \gamma = -\sum_{s \in S'} \log\left(\tan\frac{\gamma(t)(s)}{2}\right) ((\varphi - \psi)(s)) \tag{5}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} L \circ \gamma = -\sum_{s \in S'} \frac{(\varphi - \psi)^2(s)}{\sin(\gamma(t)(s))} < 0 , \tag{6}$$

wobei $S' = \{s \in S \mid \varphi(s) \neq \psi(s)\}$ ist. Nach (5) gilt:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)(t)\right) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \to 1} \left(\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)(t)\right) = -\infty .$$

Somit ist $\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)$ surjektiv und wegen (6) streng monoton. $\square$

Für $t = 0$ und $t = 1$ ist $\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)$ in $\mathbf{R}$ nicht definiert. Wegen (7) definieren wir aber

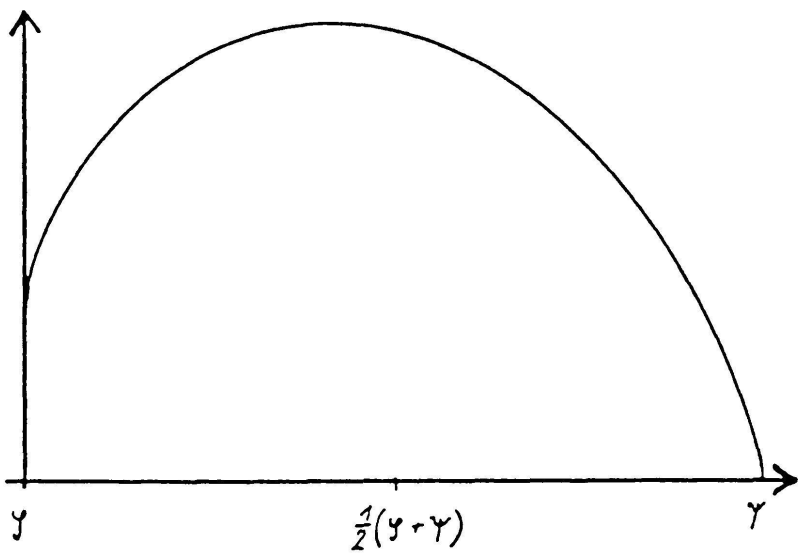
$$\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)\,|_{t=0} = +\infty \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(L \circ \gamma)\,|_{t=1} = -\infty\,.$$

Nach Lemma 3.4. ist die Funktion $L\,|_{[\varphi,\psi]}: [\varphi, \psi] \mapsto \mathbf{R}$ konkav und nimmt in den Randpunkten φ und ψ kein Maximum an. Wir erhalten somit:

3.5. PROPOSITION. *Die Funktion* $L: W \mapsto \mathbf{R}$ *ist auf* W *streng konkav.*

Sei im Folgenden L_{Koh} die Einschränkung von L auf W_{Koh}.

3.6. SATZ. *Die Funktion* $L_{\mathrm{Koh}}: W_{\mathrm{Koh}} \to \mathbf{R}$ *nimmt auf der kompakten Menge* W_{Koh} *genau ein Maximum an. Dieses Maximum liegt in* $\mathring{W}_{\mathrm{Koh}}$ *und ist dort der einzige kritische Punkt.*



FIGUR 6

Die Einschränkung von L auf das Intervall $[\varphi, \psi]$

Beweis. Die Teilmenge W_{Koh} von W ist selbst wieder konvex und die Randpunkte von W_{Koh} sind auch Randpunkte von W. Die Behauptung folgt nun nach Lemma 3.4. $\square$