5. Randwinkel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Randwinkel

Sei $\psi \in W_{\text{Koh}}$ und $e \in E_{\text{Rand}}$ eine Randecke. Dann ist

$$\rho(\psi, e) = \sum_{s \in S} (e, s)\psi(s) \geqslant 0$$

der Randwinkel von von ψ an der Ecke e. Es gilt:

$$\sum_{s \in S} \psi(s) = \pi(\#\Delta) = 2\pi(\#E_{\text{In}}) + \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} \rho(\psi, e)$$

Aus $\#\Delta - \#K + \#E = 1$ folgt:

$$-2\pi = \pi(\underbrace{-1 + 2\#\Delta - \#E_{\text{In}}}_{= -1 + \#K} - \#K) = \pi(\#\Delta - \#E - \#E_{\text{In}})$$

$$= \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\rho(\psi, e) - \pi)$$

und somit erhalten wir eine Version von Gauss-Bonnet:

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(\psi, e))$$

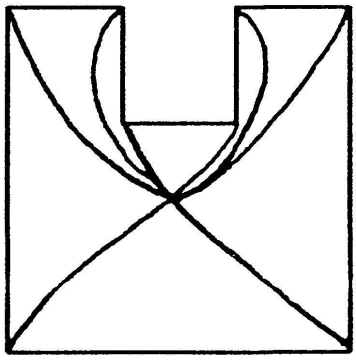
5.1. Polyeder mit festen Randwinkeln. Die Funktion $\rho : E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ ist ein *Randwinkelsystem,* wenn gilt

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(e)) .$$

Ist ρ ein Randwinkelsystem, dann ist

$$W^{\rho}_{\text{Koh}} := \{\psi \in W_{\text{Koh}} \mid \rho(\psi, e) = \rho(e) , \quad \forall e \in E_{\text{Rand}}\} .$$

Obwohl nach dem Satz von Fary die Menge $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$ nicht leer ist, kann $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ durchaus leer sein. Die Triangulation von Figur 12 etwa kann nicht geradlinig realisiert werden, wenn wir die Randwinkel fest lassen.



Figur 12

5.2. SATZ. *Sei* $\rho: E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ *ein Randwinkelsystem und sei* $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ *nicht leer. Dann gibt es genau eine immersierte Kreispackung* $\eta \in W^{\rho}_{\text{Koh}}$. *Das Polyeder* P_η *ist in* $\mathbf{E}$ *eingebettet, wenn* $\rho(e) \leqslant \pi, \forall e \in E_{\text{Rand}}$.

Beweis. Der Raum W^{ρ}_{Koh} ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von W. Für $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ ist sein Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\text{Koh}}$ unabhängig von ψ. Es gilt:

$$(8) \qquad T_\psi W_{\text{Koh}} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{s \in S} (d, s) v(s) = 0, & \forall d \in \Delta \\ \text{und} & \\ \sum_{s \in S} (e, s) v(s) = 0, & \forall e \in E \end{array} \right\}$$

Nach Lemma 2.3. hat W^{ρ}_{Koh} die Dimension $1 + 2\#\Delta - \#E = \#K_{\text{In}}$, wobei die letzte Gleichheit wieder mit Induktion über die Anzahl Dreiecke folgt.

Für jede innere Kante k ist der Vektor t_k Tangentialvektor von W^{ρ}_{Koh}. Nach Lemma 2.5. spannen diese den Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\text{Koh}}$ auf.

Sei L^{ρ}_{Koh} die Einschränkung von L auf W^{ρ}_{Koh}. Dann hat wegen Lemma 3.4. die konkave Funktion L^{ρ}_{Koh} genau einen kritischen Punkt η. Da $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K_{\text{In}}$, ist η wegen Lemma 4.3. eine immersierte Kreispackung. □

LITERATUR

[An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobacevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik 10* (1970), 413-440.

[Cv1] COLIN DE VERDIÈRE, Yves. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones math. 104* (1991), 655-669.

[Cv2] —— Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface. *Enseignement Math. 37* (1991), 201-212.

[Fa] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Scientiarium Mathematicarum (Acta Universitatius Szegedensis) 11* (1946-1948), 229-233.

[Mi] MILNOR, J.W. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. A.M.S. 6* (1982), 9-24.

[Tu] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Princeton Notes (1978), chap. 13.

(Reçu le 18 mars 1991)

Walter Brägger

Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel