2. Exemples et cas particuliers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$h \mapsto \langle P''(x)h \mid h \rangle$ est constant pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, car $n \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $q = n - p$, soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \operatorname{ind} P''(x) = p, \ \forall x \neq 0\} .$$

On a bien sûr: $H_n^{(m)} = \cup_{p=0}^{n} H_{p,q}^{(m)}$.

Quand $m = 2$, l'ensemble $H_{p,q}^{(2)}$ s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice p sur $\mathbf{R}^n$. Mais si m est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré m satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si n est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans $H_n^{(m)}$ si $m > 2$ et $n > 2$.

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

Pour quelles valeurs de m, p et q, l'ensemble $H_{p,q}^{(m)}$ est-il non vide?

Pour P dans $H_{p,q}^{(m)}$, quel est le nombre de composantes connexes de $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$?

Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de $P: \{P = \alpha\}$, respectivement des variétés de sous-niveaux de $P: \{P \leqslant \alpha\}$?

L'étude de $H_{p,q}^{(m)}$ est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$, cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et $p, q \neq j$ alors l'hypersurface tubulaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par $\operatorname{Re} z_0 = P(\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$ satisfait la condition de Derridj $D(j)$ qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de $\bar{\partial}_b$ sur les $(0, j)$-formes. La connectivité des sous-niveaux de P est utile pour montrer que $D(j)$ est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels: $n = 2$, $p = 0$ ou $m = 4$ et génériques: $m \geqslant 6$. Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

2. Exemples et cas particuliers

(2.1) Exemple. *Pour $m \geqslant 2$ le polynôme $P(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$ appartient à $H_{1,1}^{(m)}$*

Preuve. Si $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} f = -\operatorname{Im}\frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}$$

et, par suite,

$$\det(\operatorname{Re} f)'' = -\left|\frac{d^2 f}{dz^2}\right|^2 .$$

Quand $f(z) = z^m$, le déterminant hessien de $\operatorname{Re} f$ est donc négatif, sauf en $z = 0$. □

(2.2) EXEMPLE. $P(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$, *pour* $k \geqslant 1$, *appartient à* $H_{0,n}^{(2k)}$.

Preuve. Par calcul direct, on trouve que $P''(x)$ vaut $2k\,|x|^{2k-4}$ fois

$$\begin{pmatrix} (2k-1)x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & (2k-2)x_1x_2 & \cdots \\ (2k-2)x_1x_2 & x_1^2 + (2k-1)x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Si $x = (1, 0, \ldots, 0)$, cette matrice est diagonale de valeurs propres $2k(2k-1)$, $2k, \ldots, 2k$. Comme P est invariant par toute transformation orthogonale et comme

$$(3) \qquad U \in GL(n, \mathbf{R}) \Rightarrow U^t P''(Ux)U = (P \circ U)''(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

les valeurs propres de $P''(x)$ sont

$$2k(2k-1)\,|x|^{2k-2}, 2k\,|x|^{2k-2}, \ldots, 2k\,|x|^{2k-2}. \qquad \square$$

(2.3) LEMME. *Pour* m *impair supérieur à* 2, *on a:*

$$H_{0,2}^{(m)} = H_{2,0}^{(m)} = \varnothing.$$

Preuve. Soit P un polynôme homogène de degré m et dénotons par $a \in \mathbf{S}^1$ (sphère unité de $\mathbf{R}^2$) un point où P atteint son maximum sur $\mathbf{S}^1$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange et la relation d'Euler montrent que $P'(a) = mP(a)a$. Une seconde application de la relation d'Euler donne

$$P''(a)a = (m-1)P'(a) = m(m-1)P(a)a.$$

Ainsi a est vecteur propre de $P''(a)$ avec valeur propre $m(m-1)P(a)$. Si P appartient à $H_{2,0}^{(m)}$ alors cette valeur propre est négative et, par suite, $P(a)$ est négatif. Il s'ensuit que P est négatif en dehors de 0, donc m est pair. □

(2.4) PROPOSITION (A. Andreatta [1]). *Si* $k \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 3$, *alors* $H_n^{(2k+1)} = \varnothing$.

Preuve. Si P est un polynôme homogène de degré impair alors P' est une application homogène de degré pair; elle est donc non injective. D'après la proposition (4.1), il s'ensuit que $P \notin H_n^{(2k+1)}$. □

(2.5) EXEMPLE. *L'ensemble* $H_{2,2}^{(4)}$ *ne contient pas de polynôme du type suivant:*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 4} a_{jk} x_j^2 x_k^2 .$$

Preuve. Soit P un polynôme de ce type appartenant à $H_4^{(4)}$. Alors $P''(x)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 12a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_2^2 + 2a_{13}x_3^2 + 2a_{14}x_4^2 & \cdots & 4a_{14}x_1x_4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 4a_{14}x_1x_4 & \cdots & 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2 + 12a_{44}x_4^2 \end{pmatrix} .$$

Quand $x_4 = 0$, le déterminant de $P''(x)$ est un multiple de $Q(x_1, x_2, x_3) := 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2$; d'après (1), la forme quadratique Q doit être définie et donc a_{14}, a_{24} et a_{34} ont le même signe. D'autre part, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$, les valeurs propres de $P''(x)$ sont $2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34}$ et $12a_{44}$. Donc l'indice de $P''(0, 0, 0, 1)$ est différent de 2 et, par suite, le polynôme P n'appartient pas à $H_{2,2}^{(4)}$. □

Remarque. Il est facile de trouver des polynômes homogènes de degré pair dont la matrice hessienne a p valeurs propres $\leqslant 0$ et q valeurs propres $\geqslant 0$. En effet, $P(x) = -x_1^{2k} - \ldots - x_p^{2k} + x_{p+1}^{2k} + \ldots + x_n^{2k}$ pour k entier $\geqslant 1$ convient. Mais dès que k est supérieur à 1, $P \notin H_n^{(2k)}$. Une légère modification de cet exemple fournit un élément de $H_{1,2}^{(6)}$.

(2.6) EXEMPLE (A. Andreatta [2]). *Le polynôme*

$$P_\lambda = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \lambda(x_1^6 + x_2^6 - x_3^6)$$

appartient à $H_{1,2}^{(6)}$ *pour* $\lambda \geqslant 2$.

Preuve. Soit $Q = P_2$. On a

$$Q''_{11} = 90x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 - 12x_1^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{22} = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 90x_2^4 - 12x_2^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{33} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 12x_1^2x_3^2 + 12x_2^2x_3^2 - 90x_3^4,$$
$$Q''_{12} = 8x_1^3x_2 + 8x_1x_2^3, \quad Q''_{13} = -8x_1^3x_3 + 8x_1x_3^3, \quad Q''_{23} = -8x_2^3x_3 + 8x_2x_3^3 .$$

Comme $8x_1^2(x_1^2+x_2^2) \leqslant Q''_{11}$ et $8x_2^2(x_1^2+x_2^2) \leqslant Q''_{22}$, on a

$$(\sqrt{8x_1^2(x_1^2+x_2^2)}\, Q''_{23})^2 \leqslant Q''_{11}\, Q''^2_{23} \quad \text{et} \quad (\sqrt{8x_2^2(x_1^2+x_2^2)}\, Q''_{13})^2 \leqslant Q''_{22}\, Q''^2_{13}\,.$$

D'après l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$, il en découle

$$2Q''_{12}\, Q''_{13}\, Q''_{23} \leqslant Q''_{11}\, Q''^2_{23} + Q''_{22}\, Q''^2_{13}\,.$$

D'autre part, on vérifie que

$$Q''_{11} \geqslant 54x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4\,, \qquad Q''_{22} \geqslant 2x_1^4 + 54x_2^4 + x_3^4\,,$$
$$Q''_{33} \leqslant -x_1^4 - x_2^4 - 18x_3^4\,,$$

et, par conséquent,

$$Q''_{11}\, Q''_{22} - Q''^2_{12} \geqslant x_1^8 + x_2^8 + x_3^8\,.$$

En regroupant ces informations, on obtient

$$\det Q'' \leqslant (Q''_{11}\, Q''_{22} - Q''^2_{12})\, Q''_{33} \leqslant -(x_1^8+x_2^8+x_3^8)\,(x_1^4+x_2^4+18x_3^4)$$
$$< 0\,, \quad \text{si} \quad x \neq 0\,.$$

Pour $\lambda \geqslant 2$, on a, avec $\mu = 30(\lambda-2)$.

$$\begin{aligned}\det P''_\lambda = &-\mu^3 x_1^4 x_2^4 x_3^4 + \mu^2(x_1^4x_2^4Q''_{33} - x_1^4x_3^4Q''_{22} - x_2^4x_3^4Q''_{11})\\ &+ \mu(x_1^4(Q''_{22}\,Q''_{33} - Q''^2_{23}) + x_2^4(Q''_{11}\,Q''_{33} - Q''^2_{13}) - x_3^4(Q''_{11}Q''_{22} - Q''^2_{12}))\\ &+ \det Q''\,.\end{aligned}$$

Comme tous les coefficients de ce polynôme en μ sont négatifs ou nuls, le déterminant de P''_λ est négatif pour $\lambda \geqslant 2$ et $x \neq 0$. Il reste à observer que $P''_\lambda(0,0,1) = \operatorname{diag}(2, 2, -30(\lambda+1))$ pour pouvoir conclure que P_λ appartient à $H^{(6)}_{1,2}$. $\square$

L'exemple générique suivant est plus facile à calculer.

(2.7) EXEMPLE. *Pour tout* $k \geqslant 2$ *et quels que soient* $n \geqslant p \geqslant 0$, *le polynôme*

$$\begin{aligned}P(x) = &-(x_1^2+\ldots+x_p^2)^{k+1} + \varepsilon(x_1^2+\ldots+x_p^2)^k(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)\\ &-\varepsilon(x_1^2+\ldots+x_p^2)\,(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)^k + (x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)^{k+1}\end{aligned}$$

appartient à $H^{(2k+2)}_{p,q}$ *si* $\varepsilon > 0$ *est assez petit.*

Preuve. Puisque P est invariant par toute transformation linéaire qui conserve $(x_1^2+\ldots+x_p^2)$ et $(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)$, d'après (3), il suffit de vérifier que

$$\det P''(x_1, 0, \ldots, 0, x_n) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_n) \neq (0,0)\,.$$

Mais quand $x = (x_1, 0, \ldots, 0, x_n)$ les seules entrées non nulles de P'' sont

$$P''_{11} = -(2k+2)(2k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k(2k-1)x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{22} = \ldots = P_{pp} = -2(k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{p+1,p+1} = \ldots = P_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k(2k-1)x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k+2)(2k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k(x_1^{2k-1}x_n - x_1 x_n^{2k-1}) .$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \ldots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11}P''_{nn} - (P''_{1n})^2)P''_{22} \ldots P''_{n-1,n-1} .$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \ldots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \ldots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \ldots, 0, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ (cette affirmation est fausse pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. □

3. Enoncés des résultats

(3.1) Théorème. *Supposons* $m, n \geqslant 2$, $p = 0, \ldots, n$, $q = n - p$. *Alors l'ensemble* $H^m_{p,q}$ *est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

a) m *est impair et* $p = q = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m = 4$ *et* $p = q = 1$ *ou* $p = 0$ *ou* $q = 0$;

d) m *est pair supérieur ou égal à* 6.

(3.2) Application. *Pour* m *pair* $\geqslant 6, n \geqslant 2$ *et* $p = 0, \ldots, n$, *il existe une hypersurface régulière* M *de classe* C^∞ *de* $\mathbf{R}^{n+1}$ *contenant* 0 *telle que la courbure de Gauss-Kronecker* $K(x)$ *de* M *en* x *vérifie*

(i) $K(x) \sim |x|^{n(m-2)}$, $x \to 0$.

(ii) *L'hypersurface* M *a* p *rayons de courbure principaux négatifs et* q *rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de* 0.

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ *et* $p \neq 0$ *et* n.

(3.3) Théorème. *Soit* $P \in H^{(m)}_{p,q}$ *avec* $m \geqslant 2$ *et* $n = p + q \geqslant 3$. *Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de* P *ont les mêmes*