Appendice A Polynôme d'Alexander et forme quadratique d'un entrelacs orienté: Formule de Conway et invariant de Robertello

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPENDICE A

POLYNÔME D'ALEXANDER ET FORME QUADRATIQUE D'UN ENTRELACS ORIENTÉ: FORMULE DE CONWAY ET INVARIANT DE ROBERTELLO

Soit K un entrelacs orienté dans une sphère d'homologie orientée M et F une surface de Seifert connexe pour K (cf. [Rf] p. 118-120 ou [G] p. 24-28). Soit $i: F \times [-1, 1] \to M$ un bicollier orienté autour de F dans M. La *forme de Seifert* de la surface F est la forme bilinéaire $\mathscr{S}$ définie sur $H_1(F; \mathbf{Z})$ qui associe à deux classes d'homologie représentées par deux courbes x et y tracées sur la surface F le nombre d'enlacement de $x^+ = i(x, 1)$ et de y. Une *matrice de Seifert*[1]) S de F est une matrice de la forme $\mathscr{S}$ dans une base de $H_1(F; \mathbf{Z})$.

La forme antisymétrique $I = \mathscr{S} - {}^t\mathscr{S}$ est[2]) la forme d'intersection de la surface F, et si K est un nœud elle est unimodulaire car égale à celle de la surface F recollée avec un disque le long de K.

La forme symétrique $q = \mathscr{S} + {}^t\mathscr{S}$ est la *forme quadratique de la surface F*, elle est paire et dans le cas d'un nœud, non dégénérée de discriminant impair car congrue modulo 2 à I. L'invariant de Arf de la réduction q_2 modulo 2 de $q/2$ est l'*invariant de Rohlin-Robertello* du nœud K (cf. [Rb]).

Le *polynôme d'Alexander normalisé*[3]) de K est $\Delta_K(t) = \det(t^{1/2}S - t^{-1/2}\,{}^tS)$. Dans le cas d'un nœud, le rang de $H_1(F; \mathbf{Z})$ est pair et on obtient un polynôme[4]) en t et t^{-1} qui vérifie $\Delta_K(1) = 1$ et $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$. On en déduit que le polynôme d'Alexander ne dépend pas de l'orientation ambiante (car si l'on renverse celle-ci, la matrice de Seifert se change en sa transposée).

---

[1]) Deux surfaces de Seifert d'un même entrelacs sont isotopes après que l'on leur ait rajouté des anses triviales et donc deux matrices de Seifert sont S équivalentes: congruentes après un certain nombre de stabilisations $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (cf. [G]).

[2]) ${}^t\mathscr{S}$ désigne la transposée de la forme $\mathscr{S}$: ${}^t\mathscr{S}(x, y) = \mathscr{S}(y, x)$.

[3]) D'après la note 1 ci-dessus $\Delta_K(t)$ ne dépend pas du choix de la surface de Seifert S.

[4]) Plus généralement si le rang de $H_1(F; \mathbf{Z})$ est pair (sinon $t^{1/2}\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1}).

La variation par changement de croisement du polynôme d'Alexander normalisé est donnée par la formule de Conway:

A.1. LEMME (Formule de Conway). *Soient* K_-, K_0 *et* K_+ *trois entrelacs orientés qui coïncident hors d'une boule* B *et coupent cette boule en deux arcs dénoués disposés suivant les schémas de la figure 12*

Alors:

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{K_0}(t) .$$

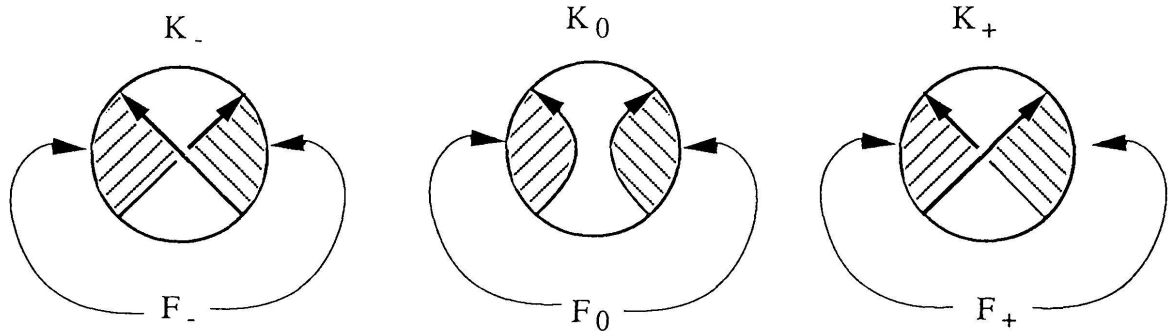

FIGURE 12

Modification d'une surface de Seifert lors d'un changement d'un croisement

Démonstration de A.1. Soit F_0 une surface de Seifert connexe pour K_0 qui coupe la boule B en deux disques disjoints bordés chacun par un arc de ∂B et une composante de $B \cap K$. Définissons F_+ et F_- des surfaces de Seifert pour K_+ et K_- qui sont égales à F_0 hors de B et dans B sont les bandes que l'on voit sur la figure 12.

Les paires de surfaces (F_+, F_0) et (F_-, F_0) sont abstraitement difféomorphes. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des courbes de F_0 formant une base de $H_1(F_0; \mathbf{Z})$ et soit a_0 une courbe de $F_\pm$ telle que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donne une base de $H_1(F_\pm; \mathbf{Z})$. Si S_-, S_0, S_+ sont les matrices de Seifert correspondantes dans ces bases on a

$$S_+ = \begin{pmatrix} a & c_1 \ldots c_n \\ b_1 & \\ & V_0 \\ b_n & \end{pmatrix}, S_- = S_+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}, \text{donc}$$

$$t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}\,{}^tS_+ = t^{1/2}S_- - t^{-1/2}\,{}^tS_- - \begin{pmatrix} t^{1/2} - t^{-1/2} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & & & \\ & & t^{1/2}S_0 - t^{-1/2}\,{}^tS_0 & \\ * & & & \end{pmatrix} .$$

En développant $\det(t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}\,{}^tS_+)$ et $\det(t^{1/2}S_- - t^{-1/2}\,{}^tS_-)$ suivant la première colonne on obtient l'identité cherchée. $\square$

A.2. LEMME. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M alors l'invariant de Rohlin-Robertello de K est la réduction modulo 2 de* $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$.

Démonstration de A.2. La forme quadratique de la surface F de matrice $Q = S + {}^tS$ est paire et de discriminant impair, elle est donc semblable sur les entiers 2-adiques à une somme orthogonale de formes paires de rang 2 (cf. [HNK] p. 4-5):

$$Q = {}^tP\begin{pmatrix} * & & \\ & \begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix} & \\ & & * \end{pmatrix} P \quad \text{où la matrice } P \text{ est de déterminant impair .}$$

$$\text{Il vient donc: } \Delta_K(-1) = \det(iQ) = \det(P)^2 \prod_{j=1}^{g} \det\left(i\begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det(P)^2 \prod_{j=1}^{g} (1 - 4a_jb_j) \equiv 1 + 4\sum_{j=1}^{g} a_jb_j \text{ modulo } 8$$

On a donc la *formule de Levine*:

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4\mathrm{Arf}(q_2) \text{ modulo } 8 .$$

Puisque $\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1}, la série de Taylor en 1 de $\Delta_K(t)$ est à coefficients entiers. Elle permet donc de calculer dans les entiers deux-adiques la valeur du polynôme d'Alexander en tout nombre impair et en particulier:

$$\Delta_K(-1) = \Delta_K(1) + \Delta_K'(1) \times (-2) + \frac{1}{2}\Delta_K''(1) \times (-2)^2$$

$$- 8\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}\Delta_K^{(n)}(1) \times (-2)^{n-3} ,$$

Par normalisation on a $\Delta_K(1) = 1$ et $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ donc $\Delta_K'(1) = 0$ d'où

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4\frac{1}{2}\Delta_K''(1) \text{ modulo } 8 .$$

Ce qui par comparaison avec la formule de Levine établit A.2:

$$\mathrm{Arf}(q_2) = \frac{1}{2}\Delta_K''(1) \text{ modulo } 2. \quad \square$$