Appendice B L'INVARIANT DE CASSON D'UN NŒUD DE GENRE 1 À SURFACE DE SEIFERT DÉNOUÉE

Autor(en): **Marin, A.**

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPENDICE B

par A. MARIN

L'INVARIANT DE CASSON D'UN NŒUD DE GENRE 1 À SURFACE DE SEIFERT DÉNOUÉE

B.1. THÉORÈME. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M ayant une surface de Seifert dénouée*[1]) *de genre* 1, *alors l'invariant de Casson $\lambda'(K)$ est égal au déterminant de la matrice de Seifert de cette surface (donc à $\frac{1}{2}\Delta''_K(1)$ puisque le genre est* 1*).*

I. REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES D'UN GROUPE LIBRE À DEUX GÉNÉRATEURS

Soit $L_2 = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ un groupe libre sur deux générateurs e_1 et e_2, on note $\delta = e_1^{-1} e_2^{-1} e_1 e_2$ et $\partial : R(L_2) \to S^3$ l'application qui à ρ associe $\rho(\delta)$. On a ici $S(L_2) = \partial^{-1}(1)$ et d'après la proposition 3.5, ∂ est une fibration de $\tilde{R}(L_2)$ au-dessus de $S^3 - \{1\}$. On note $\pi : \tilde{R}(L_2) \to \hat{R}(L_2)$ la projection.

B.2. LEMME. *L'ensemble $\Sigma = \{\rho \in \tilde{R}(L_2) \mid \partial(\rho) = -1\}$ fibre de ∂ est aussi une fibre de π. On l'oriente comme fibre de π c'est-à-dire comme $SO(3)$.*

Démonstration de B.2. On calcule que tout élément de Σ est conjugué à la représentation ρ vérifiant $\rho(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\rho(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (cf. exemple 4.7). $\square$

Soit D le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et $\sigma : D \times]0, \pi[\to \tilde{R}(L_2)$ l'application donnée par

$$\sigma(\alpha, t)(e_1) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} ; \sigma(\alpha, t)(e_2) = \begin{pmatrix} \alpha & -\sqrt{1 - |\alpha|^2} \\ \sqrt{1 - |\alpha|^2} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

---

[1]) C'est-à-dire: le complémentaire d'un bicollier de la surface de Seifert est l'union d'une boule et d'anses d'indice 1.

Dans certains calculs ci-dessous on considérera $\sigma(\alpha, t)\,(e_1)$ et $\sigma(\alpha, t)\,(e_2)$ comme les quaternions e^{it} et $\alpha - \sqrt{1 - |\alpha|^2}\,j$. Notons que $\partial\sigma\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1$.

B.3. LEMME. *Les applications* $\partial \circ \sigma$ *et* $\pi \circ \sigma$ *sont des difféomorphismes de* $D \times]0, \pi[$ *sur* $S^3 \backslash \{1\}$ *et* $\hat{R}(L_2)$ *respectivement.*

Démonstration de B.3. 1) cas de $\partial \circ \sigma$: Comme $\partial \circ \sigma$ est propre, il suffit de vérifier que $\partial \circ \sigma$ est une submersion. Les étapes du calcul sont les suivantes:

Posons $X(t) = \sigma(\alpha, t)\,(e_1) = e^{it}$ et $Y(\alpha) = \sigma(\alpha, t)\,(e_2) = \alpha - \sqrt{1 - |\alpha|^2}\,j$.
On identifie $R(L_2)$ à $S^3 \times S^3$ [en associant à ρ le couple $(\rho(e_1), \rho(e_2))$].
Alors la différentielle de σ, $D\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathscr{L} \times \mathscr{L}$ est donnée par:

$$D\sigma(\alpha_0, t_0)\,(0, 0, s) = \left(\frac{d}{dt} X(t) X(t_0)^{-1}_{|t = t_0}(s), 0\right) = (si, 0), s \in \mathbf{R} \quad \text{et}$$

$$D\sigma(\alpha_0, t_0)\,(\omega, 0) = (0, D[Y(\alpha)\,Y(\alpha_0)^{-1}]_{\alpha = \alpha_0}(\omega)) = (0, \eta(\omega) i + \theta(\omega) j)\ ,$$

où $\eta(\omega) = \mathrm{Re}(\alpha_0 i \bar{\omega})$ et $\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est linéaire et inversible.
En effet le calcul donne

$$\sqrt{1 - |\alpha_0|^2}\,\theta(\omega) = (1 - |\alpha_0|^2)\omega + \alpha_0 \mathrm{Re}(\alpha_0 \bar{\omega}) = \omega + i\alpha_0 \mathrm{Im}(\alpha_0 \bar{\omega})$$

donc si $\omega \neq 0, |i\alpha_0 \mathrm{Im}(\alpha_0 \bar{\omega}| \leqslant |\alpha_0|^2 |\omega| < |\omega|$ et $\theta(\omega) \neq 0$ donc θ est inversible.
Ensuite la différentielle de ∂, $D\partial : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ vérifie d'après 3.7

$$D\partial_{(X, Y)}(v, w) = \mathrm{Ad}_{YX}[(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}_{Y^{-1}})\,(v) + (\mathrm{Ad}_{X^{-1}} - \mathrm{Id})\,(w)]$$

on calcule donc

$$(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}_{Y^{-1}})\,(si) = 2(1 - |\alpha_0|^2) si + ?j + ?k \quad \text{si} \quad Y = Y(\alpha_0) \quad \text{et}$$
$$(\mathrm{Ad}_{X^{-1}} - \mathrm{Id})\,(ui + vj) = (-1 + e^{2it_0}) vj \quad \text{si} \quad X = X(t_0)$$

Donc $D(\partial \circ \sigma)\,(\alpha_0, t_0)$ est surjective car $|\alpha_0| < 1$ et $e^{2it_0} \neq 1$.

2) Cas de $\pi \circ \sigma$: Soit ρ une représentation irréductible, quitte à conjuguer ρ on peut supposer que $\rho(e_1) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ avec t dans $]0, \pi[$, puis quitte à conjuguer à nouveau ρ par des éléments commutant avec $\rho(e_1)$ (des matrices diagonales) on peut aussi supposer que $\rho(e_2) = \begin{pmatrix} \alpha & -b \\ b & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec b strictement positif.

L'élément qui conjugue ρ à une telle représentation de l'image de σ est unique au signe près et (on peut le calculer explicitement) son image dans $SO(3)$ dépend différentiablement de ρ. Donc $\pi \circ \sigma$ est un difféomorphisme. $\square$

B.4. *Remarque.* Il est facile de continuer les calculs précédents pour voir que si l'on oriente l'image de σ en transportant l'orientation de $D \times]0, \pi[\subset \mathbf{R}^3$ par $D\sigma$ alors: d'une part $D\partial_{\sigma(0,\pi/2)}: T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \to \mathscr{L} = T_1 S^3$ renverse l'orientation et d'autre part si l'orbite par $SO(3)$ de $\sigma(0, \pi/2)$ est orientée comme $SO(3)$ alors $T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \oplus T_{\sigma(0,\pi/2)}\sigma(0, \pi/2).SO(3)$ a une orientation opposée à celle de $\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}$ et donc $D\pi_{\sigma(0,\pi/2)}: T_{\sigma(0,\pi/2)}\mathrm{Im}(\sigma) \to T_{\hat{\sigma}(0,\pi/2))}\hat{R}(L_2)$ renverse l'orientation. En définitive, on voit que l'ensemble Σ (du lemme B2) a la même orientation qu'il soit vu comme fibre de π ou comme fibre de ∂. Nous verrons cependant que nous n'avons pas besoin de ce calcul, la différence $\varepsilon = \pm 1$ (éventuelle) d'orientation intervenant deux fois!

II. Un ouvert de représentations irréductibles du groupe fondamental d'une surface de genre 2

Soit $F = F_- \cup F_+$ une surface de genre 2, union de deux exemplaires F_- et F_+ d'une surface à bord F_0 de genre 1. Choisissons des bases (e_1^-, e_2^-) de $\pi_1(F_-)$ et (e_1^+, e_2^+) de $\pi_1(F_+)$ de sorte que $\delta_- = [e_1^-, e_2^-] = [\partial F_-]$ dans $\pi_1(F_-)$ et $\delta_+ = [\partial F_+]$ dans $\pi_1(F_+)$. Ces bases identifient $\pi_1(F_-)$ et $\pi_1(F_+)$ à des groupes libres sur deux générateurs et $R_- = R(\pi_1(F_-))$ comme $R_+ = R(\pi_1(F_+))$ à $S^3 \times S^3$. On note $\partial_-: R_- \to S^3$ et $\partial_+: R_+ \to S^3$ les flèches d'évaluation sur δ_- et δ_+ respectivement. On a comme en I des applications $\sigma_-: D \times]0, \pi[\to R_-$ et $\sigma_+: D \times]0, \pi[\to R_+$. On oriente R_* grâce à la base $e_1^-, e_2^-, e_1^+, e_2^+$ de F_*. Alors $R_* = R_- \times R_+$ et l'espace des représentations de $\pi_1(F)$ est

$$R = \{(\rho_-, \rho_+) \in R_- \times R_+ \mid (\partial_-(\rho_-))^{-1} = \partial_+(\rho_+)\}.$$

Désignons par $\mathscr{U}$ l'ouvert de $\tilde{R}$ formé des représentations $\rho = (\rho_-, \rho_+)$ de R telles que $\partial_+(\rho_+) \neq 1$.

D'après le lemme B3 dans la classe de conjugaison de tout élément ρ de $\mathscr{U}$ il existe un unique élément de la forme $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$. Ce ρ_+ est dans $\tilde{R}_+$ et on définit ainsi un difféomorphisme

$$f\colon \hat{\mathscr{U}} \to \tilde{R}_+$$

dont l'inverse associe à $\rho_+ \in \tilde{R}_+$ la classe de conjugaison de $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$ où $\sigma_-(\alpha, t)$ est choisi de sorte que $\partial_- \sigma_-(\alpha, t) = (\partial_+ \rho_+)^{-1}$.

B.5. LEMME. *Le difféomorphisme f préserve ou renverse l'orientation selon que le signe ε de la remarque B4 vaut $+1$ ou -1.*

Démonstration de B.5. On a d'abord des difféomorphismes:

$$\tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ \leftarrow (D \times]0, \pi[) \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \to (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+$$
$$(\sigma_-(\alpha, t).g, \rho_+) \leftarrow\!\shortmid ((\alpha, t), g, \rho_+) \mapsto (\partial_- \sigma_-(\alpha, t).g, g, \rho_+)$$

D'où un difféomorphisme $\varphi\colon \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ \to (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+$ qui préserve ou renverse l'orientation selon que ε vaut 1 ou -1. On a aussi un difféomorphisme

$$\psi\colon S^3 \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \to S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3), (x, g, \rho_+) \mapsto (x.\partial_+ \rho_+, \rho_+.g^{-1}, g)$$

qui préserve l'orientation.

Enfin le point $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$ de $\tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$ où $\partial_+ \rho_+^0 = -1 = \partial_- \sigma_-(0, \pi/2)$ admet un voisinage dans $R_* \supset \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$ qui est positivement difféomorphe à $A \times B \times C$ où A est un voisinage de 1 dans S^3, B un voisinage de la classe de $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$ dans $\hat{\mathscr{U}}$ et C un voisinage de 1 dans $SO(3)$. Par composition on obtient un plongement ouvert

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \to & S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times C & \to & S^3 \times SO(3) \end{array}$$

faisant commuter le diagramme (car si $\psi \circ \varphi(\rho_-, \rho_+) = ((\partial_- \rho_-).(\partial_+ \rho_+), \rho_+.g^{-1}, g)$ alors

$$\psi \circ \varphi((\rho_-, \rho_+).g') = ((\partial_- \rho_-).(\partial_+ \rho_+), \rho_+.g^{-1}, g.g'))$$

et tel que $1 \times B \times 1$ s'envoie sur $1 \times O \times 1$ où O est un voisinage de ρ_+^0 dans $\tilde{R}_+$. Donc $f\colon \hat{\mathscr{U}} \to \tilde{R}_+$ préserve ou renverse l'orientation selon que ε vaut 1 ou -1.

III. Démonstration du théorème B.1

Soit F_0 la surface de Seifert dénouée du nœud K et $F = F_- \cup F_+$ le bord d'un voisinage régulier W_1 de F_0 et W_2 le bretzel complémentaire.

Choisissons une base (e_1, e_2) de $\pi_1(F_0)$ induisant une base symplectique de $H_1(F_0)$ et prenons-la pour base de $\pi_1(W_1)$. Choisissons aussi une base (f_1, f_2) de $H_1(W_2)$ telle que la matrice des nombres d'enlacement $lk(e_i, f_j)$ soit la matrice identité, alors la matrice de l'application induite par l'inclusion $H_1(F_+) \to H_1(W_2)$ est la matrice de Seifert S de F_0. Une base symplectique de $H_1(F_*)$ est $(e_2^-, e_1^-, e_1^+, e_2^+)$ où $e_i^\pm$ est la courbe e_i poussée dans $F_\pm$.

Calcul de $(Q_1, Q_2)_{R_*}$

On identifie, grâce aux bases précédentes, $R_*, Q_1, Q_2, R_0, R_-, R_+$ à des produits de sphères S^3. D'après le corollaire 3.4 le nombre d'intersection $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ est égal à

$$\det(H_1(F_*) \to H_1(W_1) \oplus H_1(W_2))$$

où les flèches en homologie sont induites par les inclusions d'espace.

Les matrices de $H_1(F_*) \to H_1(W_1)$ et $H_1(F_*) \to H_1(W_2)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\left({}^tS . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S \right)$ où S est la matrice de Seifert de la surface F_0 et ${}^tS$ sa transposée. Notons T la matrice ${}^tS . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & T & & S \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & S - {}^tS \end{bmatrix} = -\det(S - {}^tS) = -1 ,$$

car $S - {}^tS$ est la matrice de la forme d'intersection de F_0 donc de déterminant 1. $\square$

Calcul de $< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} = 2 < \hat{\delta}, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}}$

Remarquons que $\hat{\delta} \subset \hat{R}_-$ est inclus dans l'ouvert $\hat{\mathscr{U}}$ donc d'après la partie II

$$\begin{aligned} 2 < \hat{\delta}, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} &= 2(\hat{\delta} . (\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}))_{\hat{R}} = 2\varepsilon(f(\hat{\delta}) . f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}))_{\bar{R}_+} \\ &= 2\varepsilon(\varepsilon\Sigma . f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}})_{\bar{R}_+} = -2\deg(\pi : f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}) \to \hat{R}_+) . \end{aligned}$$

Or on a un morphisme de $SO(3)$ fibrés

$$\begin{array}{ccc} Q_2 \cap \mathscr{U} & \xrightarrow{i_{+|Q_2 \cap \mathscr{U}}} & \tilde{R}_+ \\ \sigma \uparrow\downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \hat{R}_+ \end{array}$$

où $i_+ : Q_2 \to R_+$ est induit par l'inclusion $F_+ \to W_1$ et $\bar{\pi}$ est défini par ce diagramme.

Donc

$$\deg(\bar{\pi}) = \deg(i_{+|Q_2 \cap \mathscr{U}}) = \deg(i_+) = \deg(H_1(F_*) \to H_1(W_2)) = \det(S)$$

où la troisième égalité a lieu d'après le corollaire 3.4.

Donc $< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} = -2\det(S)$.

Comme $g = 2$ il vient bien:

$$\lambda'(K) = \frac{1}{2}(-1)^g \frac{< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1 . \hat{Q}_2 >_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \frac{1}{2} \frac{-2\det(S)}{-1}$$

$$= \det(S). \quad \square$$