Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES
Autor: Hausmann, Jean-Claude
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 55-70

ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie compact. Une représentation $\alpha: G \to O_{n+1}$ de G induit une action $G \times S^n \to S^n$. Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de α pour engendrer d'autres actions sur S^n. Pour cela, considérons un plongement $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que l'image $X = e(S^n)$ est invariante par l'action de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire que $GX = X$. Pour simplifier, nous supposerons également que X englobe O (c'est-à-dire que O est dans la composante relativement compacte du complémentaire de X). La figure 1 ci-dessous donne un

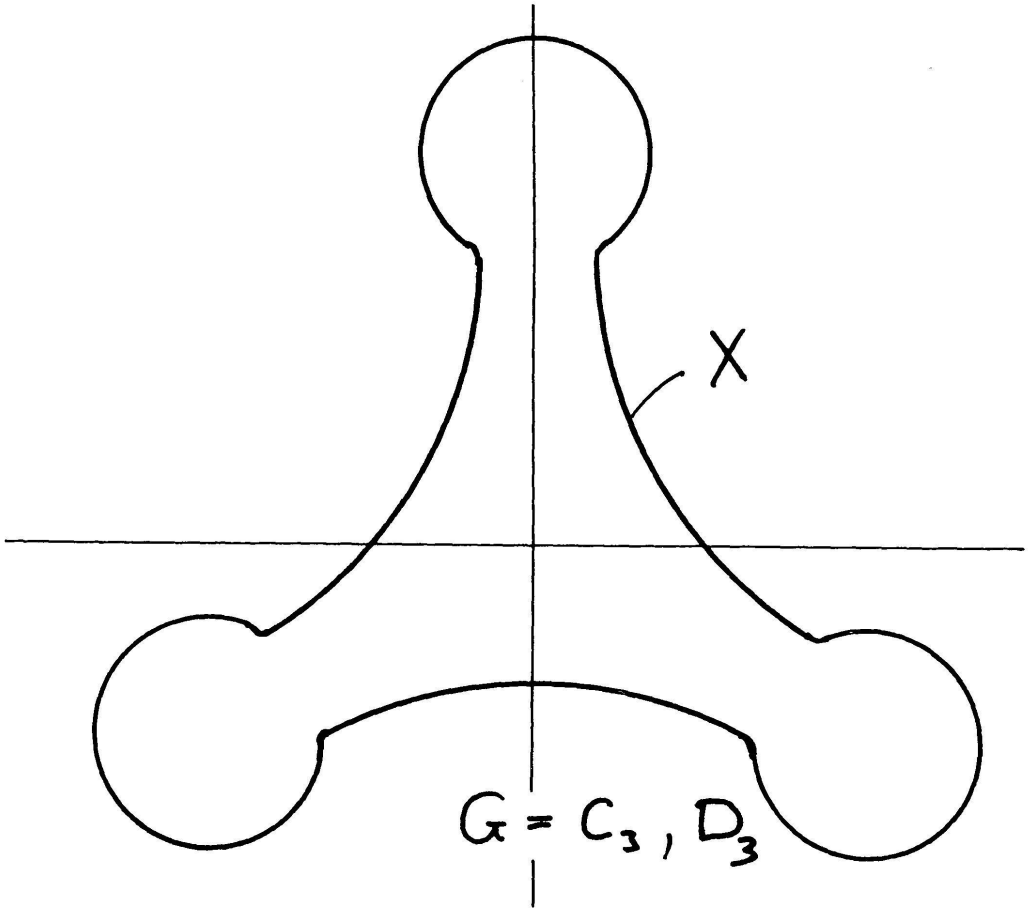

FIGURE 1

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou (D_3 (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$

$$(g,x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (*QL*) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action *QL* est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x))$?)

2) Une action *QL* est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x))$?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action *QL*?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions *QL* sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. *G*-COBORDISMES D'ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et α: $G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable f: $V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la