4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Démonstration de a) pour $G = S^3$. On procède exactement comme dans le cas de S^1. Le rôle de $\mathbf{CP}^k$ est remplacé par l'espace projectif quaternionien $\mathbf{HP}^k$. Tout S^3-fibré sur un complexe de dimension $4k$ est induit du fibré de Hopf $S^n \to \mathbf{HP}^k$. On a donc un morphisme de S^3-fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de f représente la seconde classe de Chern $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Comme $\pi_3(S^n) = 0$, on déduit, comme dans le cas précédent que $c_2(E') = \pm 1$ et donc f est homotope à un difféomorphisme (donc $\tilde{f}$ à un difféomorphisme équivariant).

Démonstration de b. Elle est en tout point semblable à celle de a).

Démonstrations de c) et d). Supposons que α est QL associée à l'action linéaire α'. Soit (B, β) un G-cobordisme G-inversible à droite, entre (S^n, α') et (S^n, α) comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de G sur B est libre. Comme B est un h-cobordisme, le quotient $W = G\backslash B$ est donc un h-cobordisme entre $V_{\alpha'}$ et V_α. Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de $H\, V_\alpha \times]0, \infty[\to V_{\alpha'} \times]0, \infty[$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme G-équivariant $h: (S^n \times]0, \infty[, \alpha) \to (S^n \times]0, \infty[\alpha')$ (actions produit). En effet, comme $(S^n \times]0, \infty[\alpha')$ est G-difféomorphe à $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha')$ (puisque α' est linéaire), $h|S^n \times \{0\}$ sera alors un plongement S^1-équivariant de (S^n, α) dans (R^{n+1}, α'), ce qui montre que α est QL associée à α'.

Le difféomorphisme h se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant V_α par $V_\alpha \times \mathbf{R}$, etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si $h: V_\alpha \times \mathbf{R} \to V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$ est un difféomorphisme, le cobordisme entre $h(V_\alpha \times \{0\})$ et $V_{\alpha'} \times \{t\}$, pour t assez grand, est clairement un h-cobordisme.

4. Actions libres d'un groupe cyclique fini

Soit C_q le groupe cyclique d'ordre q. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) Théorème. *Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, toute action QL libre de C_q sur S^n $(n \geqslant 5)$ est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*

(4.2) THÉORÈME. *Soit* α *une action linéaire libre de* C_q *sur* S^n. *Supposons que* $q \neq 2, 3, 4$ *ou* 6 *et* $n \geqslant 5$. *Alors il existe une infinité dénombrable d'actions QL de* C_q *sur* S^n *associées à* α, *qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action linéaire.*

Démonstration de (4.1). Soit α une action linéaire libre de C_q sur S^n et α' une action QL associée à α. Par le théorème (3.1) cas c), les variétés quotient V_α et $V_{\alpha'}$ sont h-cobordantes. Si $q = 2, 3, 4$ ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est nul [Co], (11.5). Comme $\pi_1(V_\alpha) = C_q$ et $n \geqslant 5$, le théorème du s-cobordisme [Ke], p. 32 assure que V_α et $V_{\alpha'}$ sont difféomorphes. Les actions α et α' sont donc différentiablement conjuguées par le cas a) du théorème (3.1).

Démonstration de (4.2). Si $q \neq 2, 3, 4$ ou 6, le groupe de Whitehead $Wh(C_q)$ est infini dénombrable ([Co], (11.5)). Pour chaque $\gamma \in Wh(C_q)$, il existe un h-cobordisme $(W_\gamma, V_\alpha, V_{\alpha(\gamma)})$ dont la torsion de Whitehead $\tau(W_\gamma, V_\alpha) = \gamma \in Wh(V_\alpha)$ ([Ke], p. 32). Le revêtement universel $\tilde{W}_\gamma$ de W_γ est un h-cobordisme entre S^n et $V_{\alpha(\gamma)}$. Par le théorème du h-cobordisme, on en déduit que $V_{\alpha(\gamma)}$ est difféomorphe à S^n, ce qui donne une action QL $\alpha(\gamma)$ sur S^n associée à α (par le cas c) du théorème (3.1)).

Nous affirmons que les classes de conjugaison topologique de ces $(S^n, \alpha(\gamma))$ contiennent au plus un nombre fini d'éléments. En effet, dans le cas contraire, on aurait, pour une collection infinie de $\gamma \in Wh(C_q)$, un homéomorphisme h_γ de $V_\alpha(\gamma)$ sur une variété fixe A. Soit $g_\gamma\colon V_\alpha \to V_{\alpha(\gamma)}$ la composition de l'inclusion $V_\alpha \subset W_\gamma$ avec la rétraction de W_γ sur $V_{\alpha(\gamma)}$, et soit $f_\gamma\colon V_\alpha \to A$ l'équivalence d'homotopie $f_\gamma = h_\gamma \circ g_\gamma$. Comme $\tau(h_\gamma) = 0$ [Co], p. 102, on a

$$\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(\tau(g_\gamma)) = h_{\gamma *}(\gamma + (-1)^{n+1}\bar{\gamma})$$

(voir [Mi], p. 401). Dans $Wh(C_q)$ on a $\gamma = \bar{\gamma}$ par [Mi], Lemma 6.7 et [Co], 11.5. D'où $\tau(f_\gamma) = h_{\gamma *}(2\gamma)$. On en déduit que pour une infinité de γ, les applications f_γ sont deux-à-deux non-homotopes. Ceci contredit le fait, facilement visible par la théorie des obstructions, que l'ensemble des classes d'homotopie d'équivalences d'homotopie de V_α dans A est fini.

On peut donc extraire un ensemble dénombrable Ω de $(S_n, \alpha(\gamma))$ qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées. Les classes de conjugaison de représentations linéaires de C^q dans $\mathbf{R}^{n+1}$ étant en nombre fini, seul un sous-ensemble fini de Ω peut donc être constitué d'actions topologiquement conjuguées à une action linéaire.

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini G sur S^n, pourvu que $Wh(G)$ contienne une infinité d'éléments τ tels que $\tau = \bar{\tau}$. C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur S^{4k-1}.

c) Il est connu que le groupe de chirurgie $L_2(C_q)$ est infini si $q > 2$ [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire V^6 avec groupe fondamental C_q qu'il existe une infinité dénombrable de variétés W^6 homotopiquement équivalente à V qui sont deux-à-deux non-topologiquement h-cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à S^6. Cet argument montre que pour $q > 2$, il existe une infinité d'actions libres de C_q sur S^6 qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action QL.

5. Actions libres de S^1

Nous commencerons par les actions libres de S^1 sur S^3.

(5.1) Proposition. *Toute action libre de S^1 sur S^3 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

Démonstration. Une action libre de S^1 sur S^3 donne un fibré principal $p: S^3 \to S^1 \backslash S^3 = V$ (voir le paragraphe 3). On en déduit que V est une surface qui, par suite exacte du fibré p est simplement connexe. Il s'en suit que V est difféomorphe à S^2. Le fibré p est induit du fibré de Hopf par une application $f: V \to S^2$. Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de f est ± 1 et donc f est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme S^1-équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) Théorème. *Toute action libre QL de S^1 sur S^n, avec $n \geqslant 7$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*