7. Exemples d'actions quasi linéaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

7. Exemples d'actions quasi linéaires

Dans ce paragraphe, nous considérerons la «donnée» suivante:

— M^{n+1} est une variété riemanienne,

— G est un groupe de Lie compact opérant sur M par isométries,

— $f: M \to \mathbf{R}$ est une application différentiable telle que $f(gx) = f(x)$ pour tout $x \in M$ et $g \in G$.

— L'application f a un unique point critique $p \in M$, qui est un extremum. Le point p est donc un point fixe pour l'action de G. On choisit une isométrie h entre l'espace tangent T_pM et $\mathbf{R}^{n+1}$ avec son produit scalaire standard. L'action induite de G sur T_pM est donc transportée par h en une action orthogonale de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$ que nous noterons α,

— Soit $q \in \mathbf{R}$ une valeur régulière de f. On suppose que la variété $f^{-1}(\{q\})$ est difféomorphe à S^n. Remarquons que $f^{-1}(\{q\})$ est une G-variété.

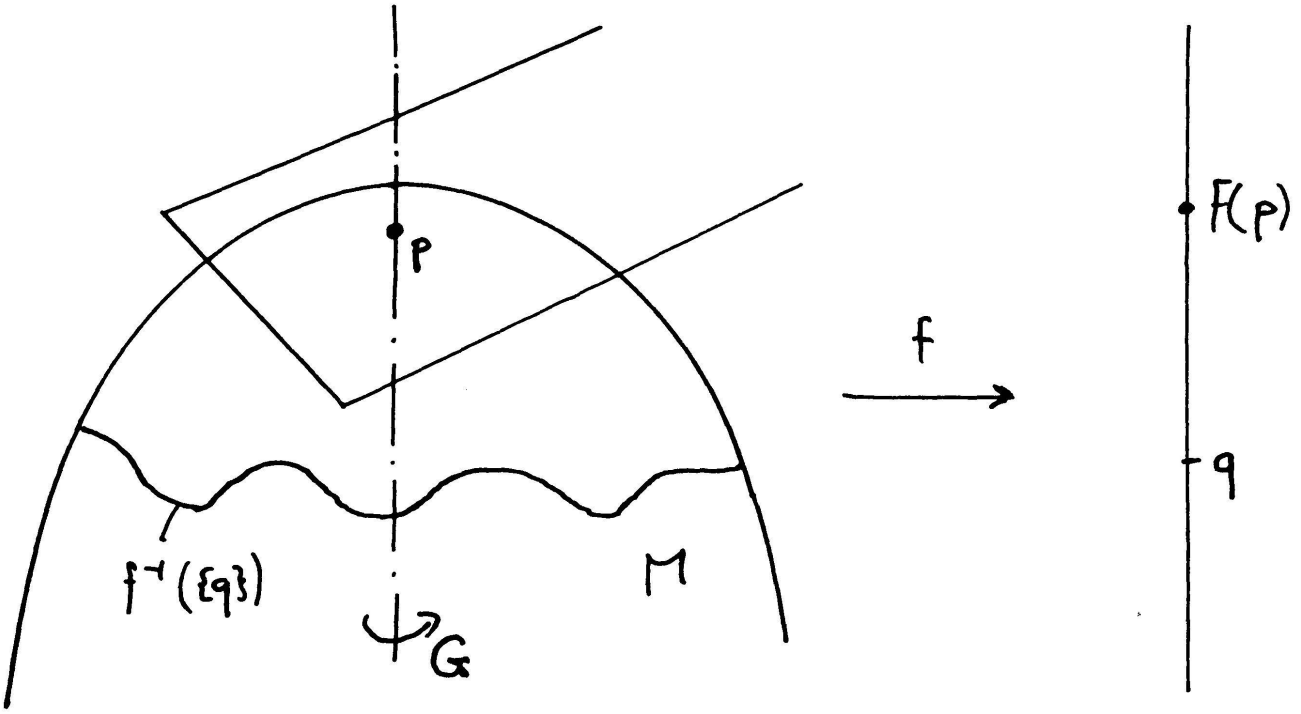

Figure 3

Pour une telle donnée, nous allons démontrer les trois propositions suivantes:

(7.1) Proposition. *L'action de G sur $f^{-1}(\{q\})$ est QL associée à α.*

(7.2) Proposition. *Supposons que p est un extremum non dégénéré. Alors l'action de G sur $f^{-1}(\{q\})$ est différentiablement conjuguée à α.*

(7.3) PROPOSITION *Soit* α' *une action QL libre de* G *sur* S^n *associée à l'action linéaire* α. *Alors il existe une donnée comme ci-dessus pour laquelle l'action de* G *sur* $f^{-1}(\{q\})$ *est différentiablement conjuguée à* α'.

Preuves. Soit U un voisinage de O dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = \exp \circ h: U \to M$ fournisse une carte au voisinage de p. On supposera que p est un minimum et que $f(p) = 0$. Comme p est l'unique point critique de f, il existe q' tel que $0 < q' < q, f^{-1}(\{q'\}) \subset \varphi(U)$ et $f^{-1}(\{q\})$ admet un difféomorphisme G-équivariant sur $f^{-1}(\{q'\})$ (on utilise le flot du champ $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ (voir [Mi3], Theorem 3.4). Comme $\varphi^{-1} \mid f^{-1}(\{q\})$ est un plongement G-équivariant de $f^{-1}(\{q\})$ dans $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha)$ cela prouve la proposition (7.1).

Si maintenant p est un minimum non-dégénéré, le lemme de Morse fournit une carte ψ telle que $f \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Dans ce système de coordonnées, les variétés de niveau de f sont des sphères standards qui intersectent donc chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement. On en déduit que $(f \circ \varphi)^{-1}(\{q'\})$ intersecte chaque rayon de $\mathbf{R}^{n+1}$ transversalement, si q' est suffisamment petit. On a alors un difféomorphisme équivariant de $(f \cdot \varphi)^{-1}(\{q'\})$ sur la sphère de rayon 1 par la projection radiale. Cela démontre (7.2). Pour démontrer (7.3), on va construire la fonction f pour $M = \mathbf{R}^{n+1}$ muni de l'action α. Si α' une action libre QL associée à α, on a, par le point d) du théorème (3.1), un difféomorphisme G-équivariant $g: (S^n \times \mathbf{R}, \alpha) \to (S^n \times \mathbf{R}, \alpha')$ (actions produits). Posons $g(x, t) = (g_1(x, t), g_2(x, t))$. Soit

$$w(x, t) = e^g 2^{(x, \log t)} .$$

On a donc un difféomorphisme G-équivariant de

$$(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha) = (S^n \times]0, \infty[, \alpha)$$

sur $(S^n \times]0, \infty[, \alpha')$ pour les actions produits donné par

$$(x, t) \mapsto (g_1(x, t), w(x, t)) .$$

On définit $f: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ par:

$$f(x, t) = e^{-1/w(x,t)^2} \quad \text{et} \quad f(0) = 0 .$$

Comme le difféomorphisme g est en quelque sorte «périodique» (voir sa construction dans la preuve de (3.1)), on a que toutes les dérivées partielles, de tout ordre, de g sont bornées et de plus $t - 2 \leqslant g_2(x, t) \leqslant t + 2$. On en déduit que

toutes les dérivées partielles de $w(x, t)$ sont bornées. Il s'en suit que f est de classe C^∞ avec toutes les dérivées partielles s'annulant en 0. On vérifie aisément que f a les propriétés voulues, ce qui démontre (7.3).

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BAK, A. The computation of surgery groups of finite groups with abelian 2-hyperelementary subgroups. *Proc. Evanston K-theory conf. (1976).* Springer Lect. Notes 551, 384-409.

[Br] BREDON, G. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press 1972.

[Co] COHEN, M. *A course in simple-homotopy theory.* Springer-Verlag 1973.

[Fr] FREEDMANN, M. The topology of 4-dimensional manifolds. *Journal of Differential geometry 17* (1982), 357-453.

[F-M] FRIEDMANN, R. and J. MORGAN. On the diffeomorphism type of certain surfaces I. *Journal of Differential geometry 27* (1988), 297-369.

[Ha] HAUSMANN, J.-Cl. *Groupes de sphères d'homologie entières.* Thèse, Université de Genève, 1974.

[Ha2] —— Sur la topologie des bras articulés. *Algebraic topology,* Poznan. Springer Lecture Notes 1474 (1989), 146-159.

[Hs] HSIANG, W. C. and W. Y. HSIANG. Some free actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres. *Quarterly J. of Math. 15* (1964), 371-374.

[Ke] KERVAIRE, M. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. AMS 144* (1969), 67-72.

[Ke2] —— Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. *Comm. Math. Helv. 40* (1965), 31-42.

[Ki] KIRBY, R. *The topology of 4-manifolds.* Springer Lect. Notes 1374 (1989).

[Mi] MILNOR, J. Whitehead torsion. *Bull. American Math. Soc. 72* (1966), 358-426.

[Mi2] —— Some free action of cyclic groups on spheres. *Differentiable Analysis,* Proc. conf. Bombay (1964), Oxford Univ. Press.

[Mi3] —— *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton Univ. Press 1965.

[Po] POENARU, V. Le théorème du s-cobordisme. *Séminaire Bourbaki* (Fév. 1971) exposé n° 392.

[Ro] ROTHENBERG, M. Torsion invariants and finite transformation groups. *Proc. of Symp. in pure Math.,* AMS, Stanford 1976, 267-312.

[Vi] VINBERG, E. *Linear representations of groups.* Birkhäuser 1989.

(Reçu le 13 mai 1991)

Jean-Claude Hausmann

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH-1211 Genève 24 (Suisse)