1.1. Polynômes et séries de Laurent

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

forment de façon très simple, ce qui permet de retrouver le résultat d'Ehrhart (si P est un polytope) par un passage à la limite en $x = 1$. On peut même donner une formule explicite, mais horrible, pour la fonction i_P (voir [B], Théorème 3.1).

Dans [B], les identités précédentes entre fonctions caractéristiques ont été établies grâce au dictionnaire entre polyèdres convexes entiers, et variétés toriques munies d'un fibré en droites ample (voir [O], Chapter II). Ensuite, M. Ishida a donné une démonstration élémentaire de résultats un peu plus généraux (voir [I]). Le but de ce travail est d'exposer les propriétés des fonctions caractéristiques des polyèdres convexes entiers, en suivant les idées d'Ishida, et d'en déduire des généralisations du théorème d'Ehrhart (théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous). Les preuves reposent sur des variantes de la relation d'Euler entre les nombres de faces d'un polytope (lemme 2.1 ci-dessous).

Un problème intéressant mais complètement ouvert, est d'interpréter, en fonction de la géométrie du polytope convexe entier P, les coefficients de l'application polynomiale $i_P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$. On sait depuis Ehrhart que $a_0 = 1$; de plus, d est la dimension de P; a_d est la mesure de P, et $2a_{d-1}$ est la mesure du bord de P (voir 3.2 ci-dessous). Mais la signification de $a_1, \ldots, a_{d-2}$ est inconnue.

1. Fonctions caractéristiques

1.1. Polynômes et séries de Laurent

Les notations de cette section seront utilisées dans toute la suite. Soient M un réseau dans un espace vectoriel réel V, de dimension finie d. On note $\mathbf{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M sur $\mathbf{Z}$, et $(x^m)_{m \in M}$ sa base canonique: la multiplication dans $\mathbf{Z}[M]$ est définie par $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Le choix d'une base $(m_1, \ldots, m_d)$ de M induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$ avec l'anneau des polynômes de Laurent, à coefficients entiers, en les indéterminées $x^{m_1}, \ldots, x^{m_d}$.

On note $\mathbf{Z}[[M]]$ le groupe abélien formé des séries formelles $\sum_{m \in M} a_m x^m$ à coefficients entiers. On définit sur $\mathbf{Z}[[M]]$ une structure de module sur $\mathbf{Z}[M]$, par

$$x^p \cdot \sum_{m \in M} a_m x^m = \sum_{m \in M} a_{m-p} x^m$$

(mais en général, on ne peut définir le produit de deux séries formelles). On peut voir $\mathbf{Z}[[M]]$ comme l'ensemble des séries de Laurent formelles, en d indéterminées.

Soit S le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[M]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On note $S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$, formé des $s^{-1}u$ où $u \in \mathbf{Z}[M]$ et $s \in S$. Enfin, on note $\mathscr{L}(M)$ l'ensemble des $u \in \mathbf{Z}[[M]]$ tels que $S \cdot u$ rencontre $\mathbf{Z}[M]$; c'est un sous-$\mathbf{Z}[M]$-module de $\mathbf{Z}[[M]]$.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note S_p le sous-ensemble de S formé des produits d'au plus p éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On définit de façon évidente $S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ et $\mathscr{L}_p(M)$.

PROPOSITION. *Il existe un unique* $\mathbf{Z}[M]$*-morphisme*

$$\mathscr{S}\colon \mathscr{L}(M) \to S^{-1}\mathbf{Z}[M]$$

tel que $\mathscr{S}(u) = u$ *pour tout* $u \in \mathbf{Z}[M]$. *De plus,* $\mathscr{S}(\mathscr{L}_p(M)) \subset S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ *pour tout entier* $p \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}_p(M)$. Choisissons $s \in S_p$ tel que $v = s \cdot u \in \mathbf{Z}[M]$, et posons $\mathscr{S}(u) = s^{-1}v \in S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{S}(u)$ ne dépend pas du choix de s, et que $\mathscr{S}$ convient. □

On appelle $\mathscr{S}(u)$ la *somme* de la série formelle $u \in \mathscr{L}(M)$. Par exemple, pour tout $m \in M\backslash\{0\}$, on a:

$$\mathscr{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm}\right) = (1 - x^m)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{nm}\right) = 0 .$$

1.2. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CÔNES ET POLYÈDRES

Définitions. Une demi-droite δ de V est *entière* si son origine m est un point de M, et si $\delta\backslash\{m\}$ rencontre M. Un *cône* (convexe, rationnel, polyédral) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, de même origine O. Le cône C est *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il est enveloppe convexe de demi-droites dont les directions sont linéairement indépendantes.

Une *subdivision* du cône C est une famille $(C_i)_{i \in I}$ de cônes saillants telle que:

$C = \bigcup_{i \in I} C_i$;

si F est une face de C_i, alors $F = C_j$ pour un $j \in I$;

l'intersection $C_i \cap C_j$ est une face de C_i et de C_j.