1.2. Fonctions caractéristiques de cônes et polyèdres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Soit S le sous-ensemble de $\mathbf{Z}[M]$ formé des produits finis d'éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On note $S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ le sous-anneau du corps des fractions de $\mathbf{Z}[M]$, formé des $s^{-1}u$ où $u \in \mathbf{Z}[M]$ et $s \in S$. Enfin, on note $\mathscr{L}(M)$ l'ensemble des $u \in \mathbf{Z}[[M]]$ tels que $S \cdot u$ rencontre $\mathbf{Z}[M]$; c'est un sous-$\mathbf{Z}[M]$-module de $\mathbf{Z}[[M]]$.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note S_p le sous-ensemble de S formé des produits d'au plus p éléments de la forme $1 - x^m$, $m \in M\backslash\{0\}$. On définit de façon évidente $S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ et $\mathscr{L}_p(M)$.

PROPOSITION. *Il existe un unique* $\mathbf{Z}[M]$*-morphisme*

$$\mathscr{S}\colon \mathscr{L}(M) \to S^{-1}\mathbf{Z}[M]$$

tel que $\mathscr{S}(u) = u$ *pour tout* $u \in \mathbf{Z}[M]$. *De plus,* $\mathscr{S}(\mathscr{L}_p(M)) \subset S_p^{-1}\mathbf{Z}[M]$ *pour tout entier* $p \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{L}_p(M)$. Choisissons $s \in S_p$ tel que $v = s \cdot u \in \mathbf{Z}[M]$, et posons $\mathscr{S}(u) = s^{-1}v \in S^{-1}\mathbf{Z}[M]$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{S}(u)$ ne dépend pas du choix de s, et que $\mathscr{S}$ convient. □

On appelle $\mathscr{S}(u)$ la *somme* de la série formelle $u \in \mathscr{L}(M)$. Par exemple, pour tout $m \in M\backslash\{0\}$, on a:

$$\mathscr{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm}\right) = (1 - x^m)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{nm}\right) = 0 .$$

1.2. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE CÔNES ET POLYÈDRES

Définitions. Une demi-droite δ de V est *entière* si son origine m est un point de M, et si $\delta\backslash\{m\}$ rencontre M. Un *cône* (convexe, rationnel, polyédral) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, de même origine O. Le cône C est *saillant* s'il ne contient aucune droite, et *simplicial* s'il est enveloppe convexe de demi-droites dont les directions sont linéairement indépendantes.

Une *subdivision* du cône C est une famille $(C_i)_{i \in I}$ de cônes saillants telle que:

$C = \bigcup_{i \in I} C_i$;

si F est une face de C_i, alors $F = C_j$ pour un $j \in I$;

l'intersection $C_i \cap C_j$ est une face de C_i et de C_j.

La *fonction caractéristique* d'un cône C est l'élément

$$\varphi(C) = \sum_{m \in C \cap M} x^m$$

de $\mathbf{Z}[[M]]$. Remarquons que C est uniquement déterminé par $\varphi(C)$; en effet, C est l'enveloppe convexe du support de $\varphi(C)$.

PROPOSITION. *Pour tout cône C, on a: $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$. De plus, C est saillant si et seulement si $\varphi(C) \neq 0$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où C est simplicial. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ses arêtes. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le monoïde $\delta_i \cap M$ a un unique générateur m_i. Tout élément de C s'écrit de façon unique $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) m_i$ où $x_i \in \mathbf{N}, 0 \leqslant y_j < 1$ et $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j \in C$. Par suite, si P_C désigne l'ensemble des $\sum_{j=1}^{n} y_j m_j$ avec $0 \leqslant y_j < 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, alors

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = \sum_{m \in P_C \cap M} x^m$$

et de plus $P_C \cap M$ est fini, donc $C \in \mathscr{L}_n(M) \subset \mathscr{L}_d(M)$.

Dans le cas général, on choisit une subdivision $(C_i)_{i \in I}$ de C en cônes simpliciaux. Alors

$$\varphi(C) = \sum_i \varphi(C_i) - \sum_{i,j} \varphi(C_i \cap C_j) + \sum_{i,j,k} \varphi(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots$$

est une somme alternée de fonctions caractéristiques de cônes simpliciaux, donc $\varphi(C) \in \mathscr{L}_d(M)$.

Pour la seconde assertion, supposons d'abord que C n'est pas saillant. Il existe alors $m \in M \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{R}m \subset C$. Par suite, $C = m + C$ d'où $(1 - x^m)\varphi(C) = 0$, et $\mathscr{S}(\varphi(C)) = 0$.

Réciproquement, supposons C saillant, et montrons que $\mathscr{S}(\varphi(C)) \neq 0$. Sinon, soient $m_1, \ldots, m_n$ dans $M \setminus \{0\}$ tels que

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) = 0 \,. \tag{1}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble des formes linéaires λ sur V, telles que $\lambda(p) > 0$ pour tout $p \in C \setminus \{0\}$, est un ouvert non vide du dual V^* de V. Par suite, on peut trouver un tel λ avec $\lambda(m_i) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Puisque

$$1 - x^{m_i} = -x^{m_i}(1 - x^{-m_i}) ,$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert $(\lambda > 0)$, on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). □

Pour tout cône C, on pose $\Phi(C) = \mathscr{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier* P comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathscr{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathscr{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P.

2. Identités entre fonctions caractéristiques

2.1 Un propriété d'additivité

Définitions. Le *cône dual* d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geqslant 0, \ \forall x \in C\} .$$

$\check{C}$ est un cône convexe polyédral de V^*, rationnel pour le réseau dual M^* de M. De plus, la codimension de $\check{C}$ est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C. En particulier, C est saillant si et seulement si $\check{C}$ est de dimension d.

Soit C un cône de V, et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i. Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ, linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leqslant f(a + b)$ pour tous a, b dans σ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.