Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYÈDRES ET RÉSEAUX
Autor: Brion, Michel
Kapitel: 2.3. Fonctions caractéristiques de polyèdres ouverts
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59483

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Soit σ l'ensemble des $x \in V^*$ tels que $f(x) \neq -\infty$. C'est un cône, et $f(x) = \min_{s \in \mathscr{E}} x(s)$ pour tout $x \in \sigma$, où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sommets de P. Pour toute face F de P, on note P_F l'ensemble des $t(-f+p)$ où $f \in F$, $t \in \mathbf{R}_+$ et $p \in P$; c'est un cône, dont on note σ_F le cône dual. Remarquons que $P_F \cap (-P_F)$ est la direction du sous-espace affine engendré par F; en particulier, P_F est saillant si et seulement si F se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des σ_F, F face de P, est une subdivision de σ, avec les $\sigma_s, s \in \mathscr{E}$, comme cônes de dimension maximale. De plus, $f \mid \sigma_s = s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$, et $P = \bigcap_{s \in \mathscr{E}} (s + P_s)$ si P ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision d'un cône σ de V^*. Pour tout $i \in I$, soit $f_i \in M$, tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ si σ_j est une face de σ_i. On suppose que la fonction f, obtenue par recollement des f_i, est *strictement convexe,* c'est-à-dire que $f(a) + f(b) < f(a+b)$ chaque fois que a, b appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$ est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les f_i tels que la dimension de σ_i soit maximale, et pour fonction d'appui f. De 2.1 suit donc le

THÉORÈME. *Soient P un polyèdre convexe entier, et $\mathscr{E}$ l'ensemble de ses sommets. Alors*

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où P_s est le cône engendré par $-s + P$.

2.3. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE POLYÈDRES OUVERTS

Pour tout convexe C de V, on note $\overset{\circ}{C}$ son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de C dans l'espace affine qu'il engendre.

THÉORÈME. *(i) Pour tout polyèdre convexe entier P, on a: $\varphi(\overset{\circ}{P}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et*

$$\Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{s \in \mathscr{S}} x^s \Phi(\overset{\circ}{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) Pour tout cône saillant C, on a: $\varphi(\overset{\circ}{C}) \in \mathscr{L}_d(M)$, et

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où $-C$ est le cône opposé à C.

Démonstration. On peut supposer que P engendre V. On associe à P sa fonction d'appui f, et une subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de σ comme en 2.2. Supposons d'abord que P est borné; alors $\sigma = V^*$. Montrons que

$$(4) \qquad \sum_{i \in I} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i - C_i) = (-1)^d \varphi(\overset{\circ}{P}) ,$$

où on pose $C_i = \check{\sigma}_i$. Comme en 2.1, il suffit de montrer que

$$(5) \qquad \sum_{i \in I,\, m \in f_i - C_i} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} (-1)^d & \text{si} \quad m \in \overset{\circ}{P} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

On pose $B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) > f(x)\}$ et on considère les groupes de cohomologie $H^n(V^*, B(m))$. Puisque f est linéaire sur chaque σ_i, l'ensemble $\sigma_i \cap B(m)$ est vide ou convexe, d'où comme en 2.1: $H^n(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, $H^n(V^*, B(m))$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$(6) \qquad \cdots \to \bigoplus_{\dim(\sigma_i) = n} H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) \to \cdots .$$

De plus, $H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i)$ est égal à $\mathbf{Q}$ si $m \leqslant f$ sur σ_i, c'est-à-dire si $m \in f_i - C_i$; et à 0 sinon. D'autre part, on a:

$$H^n(V^*, B(m)) = H_c^{d-n}(V^* \backslash B(m))$$

par dualité d'Alexander. De plus, puisque $V^* \backslash B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) \leqslant f(x)\}$ est un cône convexe fermé de V^*, on a: $H_c^i(V^* \backslash B(m)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$, sauf si $V^* \backslash B(m) = \{0\}$ et $i = 0$. D'où $H^n(V^*, B(m)) = 0$ sauf si $n = d$ et $m(x) > f(x)$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire si $m \in \overset{\circ}{P}$. Finalement, la caractéristique d'Euler du complexe (6) est $(-1)^d$ si $m \in \overset{\circ}{P}$, et 0 sinon, d'où (5).

Lorsque P n'est plus supposé borné, mais ne contient aucune droite, on peut trouver $x \in V^*$ tel que le polyèdre convexe $P_t = \{p \in P \mid x(p) \leqslant t\}$ soit borné, et d'intérieur non vide, pour tout t assez grand. De plus, P_t est entier pour une infinité de valeurs positives de t. En écrivant l'identité (4) pour P_t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient (4) pour P. En sommant les séries, on en déduit que

$$(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i - C_i) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^s \Phi(-P_s) .$$

En particulier, si $P = C$ est un cône saillant, alors $\mathscr{E} = \{0\}$ et $(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{C}) = \Phi(-C)$ d'où (ii). L'assertion (i) s'en déduit aussitôt, si P ne contient aucune

droite. Mais si P contient une droite, alors $\overset{\circ}{P} = m + \overset{\circ}{P}$ pour un $m \in M$, d'où $\Phi(\overset{\circ}{P}) = 0$. D'autre part, P n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas. $\square$

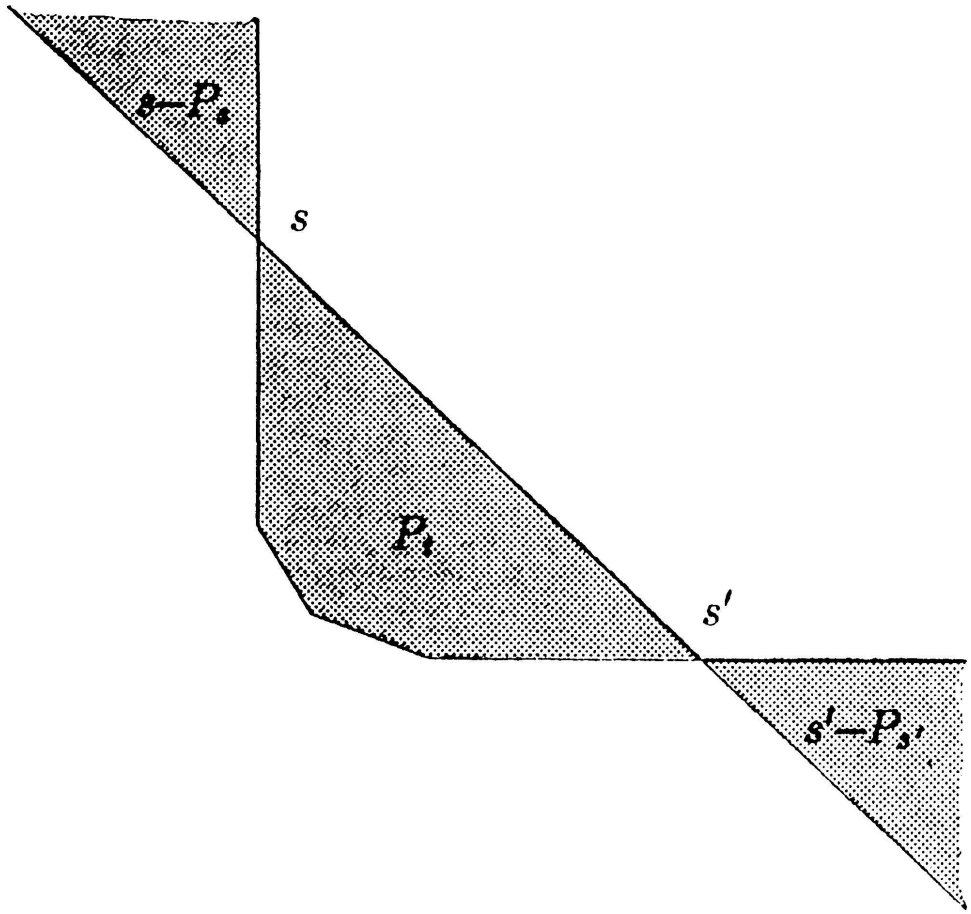

FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

COROLLAIRE. *Pour tout cône C, et toute subdivision $(\sigma_i)_{i \in I}$ de son cône dual, on a*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = \sum_{i \in I,\ C_i \text{ saillant}} \Phi(\overset{\circ}{C}_i) ,$$

où C_i est le cône dual de σ_i.

2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

Définition. Un *poids* ω est la donnée, pour tout $m \in V$ et tout cône C, d'un nombre réel $\omega(m, C)$, tel que

$\omega(m, C) = 0$ si $x \notin C$;

$\omega(m, C)$ ne dépend que de la face de m dans C;

$\omega(-m, -C) = \omega(m, C)$.