3.2. Loi de réciprocité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

avec $r_s \leqslant d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t, on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p ,$$

d'où le résultat. □

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. Loi de réciprocité

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

Théorème. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t) .$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(nP) &= \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s))\, \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)) . \tag{9}$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent. En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q .$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. □

En prenant pour poids la fonction χ définie dans l'exemple 2.4.(i), on retrouve le résultat suivant (voir [E], §6):

COROLLAIRE 1. *Soient* $i_P(n) = \operatorname{card}(((nP) \cap M))$ *et* $i_P^\circ(n) = \operatorname{card}((n\mathring{P}) \cap M)$. *Alors les fonctions* i_P *et* i_P° *sont polynomiales, et on a* $i_P(-t) = (-1)^d i_P^\circ(t)$.

Lorsqu'on prend pour poids la fonction α définie dans l'exemple 2.4(ii), on a $\alpha = \alpha^*$, d'où le

COROLLAIRE 2 (voir [M], Theorem 4.8). *La fonction*

$$i_{\alpha,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \alpha(m, nP)$$

est polynomiale, et $i_{\alpha,P}(-t) = (-1)^d i_{\alpha,P}(t)$.

Les fonctions $i_{\alpha,P}$ ont été introduites par H. Hadwiger pour caractériser l'équivalence de deux polytopes par décompositions et translations entières (voir [H], 2.2.9).

Revenons au cas général. Pour toute face F de P, l'espace affine $\langle F \rangle$ qu'elle engendre, est muni d'une mesure canonique μ: la mesure de Lebesgue normalisée de façon que la maille unité du réseau $M \cap \langle F \rangle$ soit de mesure 1.

COROLLAIRE 3. *Pour tout poids* ω, *le coefficient de* t^d *dans* $i_{\omega,P}(t)$ *est* $\mathring{\omega}\mu(P)$, *où* $\mathring{\omega} = \omega(x, P)$ *pour tout* $x \in \mathring{P}$. *Le coefficient de* t^{d-1} *dans* $i_{\omega,P}(t)$ *est*

$$\sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} (\omega(F, P) - \mathring{\omega}/2)\mu(F) .$$

Enfin, le terme constant de $i_{\omega,P}(t)$ *est* $\sum_F (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P)$.

Démonstration. On a

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) .$$

De plus, puisque

$$i_F^\circ(n) \cdot n^{-\dim(F)} = n^{-\dim(F)} \sum_{m \in \mathring{F} \cap (1/n)M} 1$$

est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_F d\mu$, on a

$$i_F^\circ(n) \underset{n \to \infty}{\sim} n^{\dim(F)} \mu(F) ,$$

d'où la première assertion. Montrons d'abord la deuxième assertion lorsque $\omega = \chi$. Alors

$$i_P(n) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M) = \operatorname{card}((nP) \cap M) - \operatorname{card}((n\partial P) \cap M)$$
$$= i_P^{\circ}(n) = (-1)^d i_P(-n) ,$$

où ∂P désigne le bord de P. Donc, si a est le coefficient de n^{d-1} dans $i_P(n)$,

$$a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F) = (-1)^d(-1)^{d-1}a ,$$

d'où $a = \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \mu(F)/2$. Dans le cas général, puisque

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_F \omega(F, P) i_F^{\circ}(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n)$$
$$+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n) ,$$

le coefficient de n^{d-1} dans $i_{\omega,P}(n)$ est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\operatorname{codim}(F) = 1} \omega(F, P)\mu(F) .$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où $\omega = \chi$; il faut montrer que $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$. Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathscr{E}} \Phi(P_s) = 1 .$$

En effet, les $\check{P}_s$ sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de V^* (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique. □

3.3. Le cas d'un polytope rationnel

Dans cette section, on considère un polytope convexe P dans V, rationnel par rapport au réseau M: pour tout sommet s de P, il existe un entier $n_s > 0$ tel que $n_s \cdot s \in M$. On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit ω un poids; posons $i_{\omega,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$. Notons $\tilde{M}$ le réseau engendré par M et les sommets de P. Soit γ le plus petit entier positif tel que $\gamma \cdot s \in M$ pour tout sommet s de P (c'est l'exposant du groupe abélien fini $\tilde{M}/M$).

Théorème. *Il existe des fonctions polynomiales* $i^{(1)}_{\omega,P}, \ldots, i^{(\gamma)}_{\omega,P}$ *sur* $\mathbf{R}$, *telles que* $i_{\omega,P}(n) = i^{(r)}_{\omega,P}(n)$ *si* $n \equiv r \pmod{\gamma}$. *De plus, on a*

$$i^{(r)}_{\omega,P}(-t) = (-1)^d i^{(\gamma-r)}_{\omega*,P}(-t)$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.