# 2. Cas où b est un entier impair

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

La non-dérivabilité de la fonction $f$ en tout point $x$ est une conséquence simple de ce théorème. L'inégalité en conclusion empêche les quotients différentiels au point $x$ d'être bornés. Nous présentons deux démonstrations de ce théorème. La première démonstration, élémentaire, n'est cependant valide que pour la fonction de Weierstrass $C(x)$ et que si $b$ est un entier impair. La seconde démonstration relativement courte et un peu magique considère le cas général où $b$ est un nombre réel supérieur à $1/a$.

## 2. Cas où $b$ est un entier impair

Soient $m \geqslant 1$ un entier, $x \in \mathbf{R}$ et $k$ un entier tel que $|b^m x/(2\pi) - k| \leqslant 1/2$. Posons $t = 2\pi k/b^m$ et $h = \pi/(2b^m)$. On a alors

$$C(t-h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t-h)\ , \qquad C(t+h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t+h)\ ,$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n t + a^m/(1-a)\ .$$

Par suite

$$2C(t) - C(t-h) - C(t+h) = A + 2a^m/(1-a)\ ,$$

avec

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n(\cos b^n t)\,(1-\cos b^n h) \geqslant -\sum_{n=0}^{m-1} 2a^n(1-\cos b^n h)\ .$$

Comme $1 - \cos\beta \leqslant \beta^2/2$, on obtient donc:

$$\begin{aligned} A \geqslant -\sum_{n=0}^{m-1} a^n(b^n h)^2 &= -h^2\{(ab^2)^m - 1\}/(ab^2-1) \\ &> -h^2(ab^2)^m/(ab^2-1)\ . \end{aligned}$$

Finalement on a

$$2C(t) - C(t+h) - C(t-h) > a^m c\ ,$$

où $c = 2/(1-a) - \pi^2/[4(ab^2-1)]$ est positif. En effet on a

$$c = \{8(ab^2-1) - \pi^2(1-a)\}/\{4(1-a)\,(ab^2-1)\}$$

et comme le dénominateur est toujours positif, $c$ est du même signe que le numérateur. On a $ab > 1$, d'où $8ab^2 + \pi^2 a > 8b + \pi^2/b$. Pour $b$ entier plus grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8+\pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} &2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2\big(C(t) - C(x)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) + \big(C(x) - C(t-h)\big) . \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point $x_m$ tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leqslant 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in ]0, 1[$. On peut trouver un entier $m$ tel que $3\pi/(2b^m) \leqslant \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

## 3. Cas général

a) Sans faire d'autre hypothèse sur $b$ que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient $L, N$ et $m$ des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m .$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t \, dt$$

où $h$ vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m}\right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N .$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leqslant 1$ si $n \geqslant m - L$ et $|\sin b^n h| \leqslant b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n = m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h} .$$