Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

Autor: Kaplan, Pierre / LEONARD, Philip A.

Kapitel: §1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60422

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 195-210

IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

par Pierre KAPLAN et Philip A. LEONARD

§ 1. INTRODUCTION

Le problème d'Eisenstein [1] dont il sera question ici est la détermination des entiers positifs $D \equiv 5 \pmod 8$ tels que l'équation

$$X^2 - DY^2 = 4 \tag{1.1}$$

a des solutions impaires. Si l'équation

$$T^2 - DU^2 = -4 \tag{1.2}$$

a des solutions entières, les longueurs l_0 et l_0^* des périodes des développements en fraction continue de $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$ respectivement sont des nombres impairs et l'on sait ([6]) que, alors, (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$l_0 \equiv l_0^* \pmod 4 . \tag{1.3}$$

Récemment Y. Mimura ([9]) a eu l'idée très intéressante et originale d'introduire le développement négatif en fraction continue de nombres irrationnels quadratiques réels et les périodes de ceux qui sont négativement réduits pour montrer que l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$l_{0-} = 3l_{0-}^* + \frac{l_0^*}{k} \tag{1.4}$$

où l_{0-} et l_{0-}^* sont les longueurs des périodes négatives de $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$ respectivement, et $k = 1$ ou 2 suivant que (1.2) a, ou non, des solutions.

En fait, la condition (1.3) avait été généralisée et pouvait être remplacée ([4]) par

$$l \equiv l^* \pmod 4 \tag{1.5}$$

où l est la longueur de la période d'une classe ambige de discriminant $4D$ et l^* celle de son image par l'homomorphisme θ du groupe des classes de discriminant $4D$ sur le groupe des classes de discriminant D défini dans [7]. La définition de θ est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux O_D et O_{4D}, permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit D un nombre positif, congru à 5 modulo 8. Soit C une classe d'idéaux* **au sens strict** *de l'ordre O_{4D} et $\theta(C)$ son image par l'homomorphisme θ. Soit l_- (respectivement l_-^*) le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de C (respectivement de $\theta(C)$) et l^* le nombre des idéaux primitifs réduits de $\theta(C)$. Alors l'équation* (1.1) *a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$l_- = 3l_-^* + l^* . \tag{1.6}$$

Dans la section suivante (§2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primitifs négativement réduits de O_{4D} et O_D avec le nombre des idéaux primitifs réduits de O_D.

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§4).

§2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit $\Delta > 0$ un discriminant. Il existe un discriminant fondamental D_0 et un entier f positif tels que $\Delta = D_0 f^2$. Soit O_{D_0} l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{D_0})$ et O_Δ l'anneau des entiers de conducteur f. Les *idéaux primitifs* de l'anneau O_Δ sont les $\mathbf{Z}$-modules $I = \left[a, \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2}\right]$ tels que

$$a > 0 , \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z} , \quad (a, b, c) = 1 , \tag{2.1}$$

c'est-à-dire $I = a[1, \varphi]$ où $\varphi = \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).