

§4. Exemples numériques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1. On sait que

$$(3.8) \quad \text{Card}(\text{Ker } \theta) = \begin{cases} 3, & \text{si (1.1) n'a pas de solution impaire,} \\ 1, & \text{si (1.1) a des solutions impaires.} \end{cases}$$

Ce résultat était déjà connu de Gauss ([2], §256, VI); d'autres démonstrations se trouvent dans [8], §151 et [5], page 172.

Le Théorème 1 est une conséquence immédiate de (3.7) et (3.8).

Remarque. Les résultats analogues aux Théorèmes 2 et 3 quand $D \equiv 1 \pmod{8}$ seront exposés dans un article ultérieur.

§4. EXEMPLES NUMÉRIQUES

a) THÉORÈME 2.

Nous donnons les valeurs de N_- , N_* et N^* pour tous les $D \equiv 5 \pmod{8}$ de 5 à 109, et pour 141 et 165 que nous étudierons en b).

D	N_-	N_*	N^*
5	4	1	1
13	10	3	1
21	14	4	2
29	16	5	1
37	24	7	3
45	20	6	2
53	22	7	1
61	36	11	3
69	34	10	4
77	26	8	2
85	46	14	4
93	38	12	2
101	36	11	3
109	58	17	7
141	58	18	4
165	60	18	6

b) THÉORÈMES 1 ET 3.

Nous noterons $H^+(\Delta)$ le nombre des classes d'idéaux au sens strict de l'anneau O_Δ .

Pour chacun des deux exemples le tableau correspondant donne successivement pour chaque classe C de C_{4D}^+ un idéal négativement réduit, le nombre l_- des idéaux négativement réduits de C , un idéal négativement réduit de $\theta(C)$ et enfin les nombres l_-^* et l^* des idéaux négativement réduits et réduits de $\theta(C)$.

b1) $D = 141$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod{8}$ tel que $h^+(D) > 1$ et tel que (1.1) n'a pas de solution impaire. On a $h^+(141) = 2$ et $h^+(4 \times 141) = 6$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 12 + \sqrt{141}]$	2	$\left[1, \frac{13 + \sqrt{141}}{2}\right]$	4	2
$[4, 13 + \sqrt{141}]$	6			
$[7, 13 + \sqrt{141}]$	6			
$[5, 14 + \sqrt{141}]$	8	$\left[5, \frac{19 + \sqrt{141}}{2}\right]$	14	2
$[11, 14 + \sqrt{141}]$	8			
$[20, 29 + \sqrt{141}]$	28			

Le Théorème 3 affirme que $2 + 6 + 6 = 3 \times 4 + 2$ et $8 + 8 + 28 = 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

Le Théorème 1 affirme que $2 \neq 3 \times 4 + 2$, $6 \neq 3 \times 4 + 2$, $8 \neq 3 \times 14 + 2$, $28 \neq 3 \times 14 + 2$, ce qui est vrai.

b2) $D = 165$. C'est le plus petit $D \equiv 5 \pmod{8}$ tel que $h^+(D) \geq 4$ et tel que (1.1) a des solutions impaires. On a $h^+(165) = h^+(4 \times 165) = 4$.

C	l_-	$\theta(C)$	l_-^*	l^*
$[1, 13 + \sqrt{165}]$	4	$\left[1, \frac{13 + \sqrt{165}}{2}\right]$	1	1
$[3, 15 + \sqrt{165}]$	8	$\left[3, \frac{15 + \sqrt{165}}{2}\right]$	2	2
$[7, 16 + \sqrt{165}]$	14	$\left[7, \frac{23 + \sqrt{165}}{2}\right]$	4	2
$[11, 22 + \sqrt{165}]$	34	$\left[11, \frac{33 + \sqrt{165}}{2}\right]$	11	1

Les Théorèmes 1 et 3 affirment que $4 = 3 \times 1 + 1$, $8 = 3 \times 2 + 2$, $14 = 3 \times 4 + 2$ et $34 = 3 \times 11 + 1$, ce qui est exact.

D'autres exemples du Théorème 1 se trouvent dans [9].

Les auteurs remercient le rapporteur pour ses indications judicieuses qui leur ont permis de parfaire leur texte.

RÉFÉRENCES

- [1] EISENSTEIN, G. Aufgaben. *J. reine angew. Math.* 27 (1844), 86-87. (Werke I. pp. 111-112, Chelsea Publishing Company, New York 1975.)
- [2] GAUSS, C. F. *Arithmetische Untersuchungen (Disquisitiones Arithmeticae)*. Chelsea Publishing Company, New York 1965.
- [3] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 5e Edition (1989).
- [4] ISHII, N., P. KAPLAN and K. S. WILLIAMS. On Eisenstein's problem. *Acta Arithmetica* 54 (1990), 323-345.
- [5] KAPLAN, P. *Cours d'Arithmétique*. Université de Nancy I, U.E.R. de Sciences Mathématiques, 1973.
- [6] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. Pell's equations $X^2 - mY^2 = -1, -4$ and continued fractions. *J. Number Theory* 23 (1986), 169-182.
- [7] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. The distance between ideals in the orders of a real quadratic field. *L'Enseignement Mathématique* 36 (1990), 321-358.
- [8] LEJEUNE DIRICHLET, P. G and R. DEDEKIND. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Chelsea Publishing Company, New York (1968).
- [9] MIMURA, Y. On odd solutions of the equation $X^2 - DY^2 = 4$. *Proceedings of the symposium on analytic number theory and related topics*, Gakushuin University, Tokyo (1992), 110-118.
- [10] PERRON, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner (1977).
- [11] TAKAGI, T. *Théorie des nombres élémentaires*. Kyoritsu, Tokyo (1971), (en japonais).

(Reçu le 10 novembre 1992)

Pierre Kaplan

Université de Nancy I
Département de Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre Les Nancy Cedex
France

Philip A. Leonard

Arizona State University
Tempe AZ 85281-1804
USA