§3. Combinatoire et conjugaison topologique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$\psi: \mathbf{C}^2 \backslash L_f^2 \to \mathbf{C}^2 \backslash L_g^2$ *et* $\varphi: \mathbf{C} \backslash L_f^1 \to \mathbf{C} \backslash L_g^1$ *tels que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 \backslash L_f^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}^2 \backslash L_g^2 \,. \\ {\scriptstyle f_|}\downarrow & & {\scriptstyle g_|}\downarrow \\ \mathbf{C} \backslash L_f^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C} \backslash L_g^1 \,. \end{array}$$

2.9. THÉORÈME [Fourrier]. *Soient* $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$ *et soient*

$$\tilde{K}_f = K_f \cup \bigcup_{i=1}^{r} K_f^i \quad \text{et} \quad \tilde{K}_g = K_g \bigcup_{i=1}^{s} K_g^i$$

les entrelacs totaux de f, g *(*K_f *et* K_g *sont les entrelacs génériques,* K_f^i *et* K_g^j *sont les entrelacs spéciaux). Alors,* $f \sim_\infty g$ *si et seulement si* $r = s$ *et il existe un homéomorphisme orienté* $h: S^3 \to S^3$ *tel que* $h(K_f) = K_g$ *et* $h(K_f^i) = K_g^{\sigma(i)}, i = 1, \ldots, r,$ *où* σ *est une permutation de* $\{1, \ldots, r\}$.

Ce théorème montre que les classes d'équivalence de $\sim_\infty$ sont aussi déterminées par des invariants combinatoires.

§3. COMBINATOIRE ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE

Nous allons définir précisément la *combinatoire* des polynômes et étudier son rapport avec les classes d'équivalence de $\sim$.

Soit $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ et soit $S(f) \subset \mathbf{C}$ l'ensemble de (2.2). Alors, la classe d'isomorphie de la fibration $f_|: \mathbf{C}^2 \backslash f^{-1}(S(f)) \to \mathbf{C} \backslash S(f)$ est bien évidemment un invariant topologique de f. Les renseignements sur la fibre générique sont entièrement contenus dans l'entrelacs générique, d'après (2.7). Les renseignements sur la monodromie de la fibration autour des valeurs dans $S_\infty(f)$ peuvent être déduits de (2.9); ce résultat contient aussi le plongement en dehors d'un compact des fibres irrégulières à l'infini.

Pour connaître localement la monodromie autour des valeurs dans $C(f)$, il faut connaître le type topologique des singularités affines de f. En effet, soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^2$ un point critique de f de valeur critique t_0. On prend $0 < \varepsilon \ll 1$ et $0 < \delta \ll \varepsilon$; alors, si $0 < |t - t_0| < \delta$, l'espace $f^{-1}(t) \cap \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varepsilon^2\}$ est une fibre de Milnor du germe de singularité de courbe plane $(f^{-1}(t_0), (x_0, y_0))$. En plus, une

restriction convenable de f est un modèle de la fibration de Milnor. Puisque les polynômes sont à singularités isolées le support de la monodromie autour des valeurs dans $C(f)$ est contenu dans un voisinage des singularités affines de f.

Nous allons donner les renseignements combinatoires qu'il faut pour coder, d'une part, ces renseignements locaux sur la fibre générique et la monodromie de la fibration de f et, d'autre part, les renseignements sur les fibres non génériques.

3.1. Soit $S(f) = \{t_1, \ldots, t_p\}$ l'ensemble des valeurs critiques et des valeurs irrégulières à l'infini, et soit $t_0 \in \mathbf{C} \setminus S(f)$. Considérons la courbe projective plane C_f d'équation

$$\tilde{F}(X, Y, Z) := Z \prod_{j=0}^{p} (F(X, Y, Z) - t_j Z^d) .$$

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ses composantes irréductibles sont: la droite à l'infini, l'adhérence d'une fibre générique de f et les adhérences des fibres spéciales de f.

Soit $\sigma : Y \to \mathbf{P}^2$ la résolution plongée minimale des singularités de la courbe C_f. La courbe $\sigma^{-1}(C_f)$ est une courbe connexe dans Y dont toutes les composantes irréductibles sont lisses et tous les points singuliers sont doubles ordinaires. Nous allons définir un graphe pondéré $G(F, f)$, qui aura plusieurs classes de sommets.

Le graphe sous-jacent est le graphe dual de $\sigma^{-1}(C_f)$. Les sommets de ce graphe correspondent aux composantes irréductibles de la courbe; le nombre d'arêtes qui connectent deux sommets est le nombre de points d'intersection entre les composantes irréductibles de $\sigma^{-1}(C_f)$ qui leur sont associées. Soit $V(F, f)$ l'ensemble des sommets; nous considérons une partition de cet ensemble

$$V(F, f) = V_g(F, f) \cup \bigcup_{i=1}^{p} V_j(F, f) \cup V_a(F, f) \cup V_\infty(F, f) .$$

Nous allons décrire chacun de ces sous-ensembles avec la pondération de chaque sommet:

(i) $V_g(F, f)$ est le sommet correspondant à la transformée stricte de C_{t_0}. La pondération de ce sommet sera $\{g, \gamma, e\}$, où γ indique le genre de la composante et e son nombre d'Euler, i.e., sa self-intersection.

(ii) $V_j(F, f)$ est l'ensemble des sommets correspondants à la transformée stricte de C_{t_j}, $j = 1, \ldots, p$. La pondération de ces sommets sera $\{j, \gamma, e\}$, où γ indique le genre de la composante et e son nombre d'Euler.

(iii) $V_a(F, f)$ est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes exceptionnelles des singularités affines. La pondération de ces sommets sera $\{a, e\}$, où e indique le nombre d'Euler de la composante. Chaque composante connexe du sous-graphe contenant les sommets de $V_a(F, f)$ est un arbre qui détermine le type topologique d'une singularité affine de f.

(iv) $V_\infty(F, f)$ est l'ensemble des sommets correspondants aux composantes qui sont envoyées dans L_∞ par σ. La pondération de ces sommets sera $\{\infty, e\}$, où e indique le nombre d'Euler de la composante.

L'homogénéisation F de f dépend des coordonnées affines de $\mathbf{C}^2$. Une conséquence du *plumbing calculus* de [Neumann 1] (ou bien de la structure des équivalences birationnelles entre surfaces) est la suivante:

3.2. PROPOSITION. *Soient F_1, F_2 deux homogénéisations de f. Alors, quitte à renuméroter $V_{t_j}(F_k, f)$, $k = 1, 2$, nous pouvons passer de $G(F_1, f)$ à $G(F_2, f)$, en tant que graphes pondérés à plusieurs types de sommets, par une suite de mouvements des types suivants:*

(i)

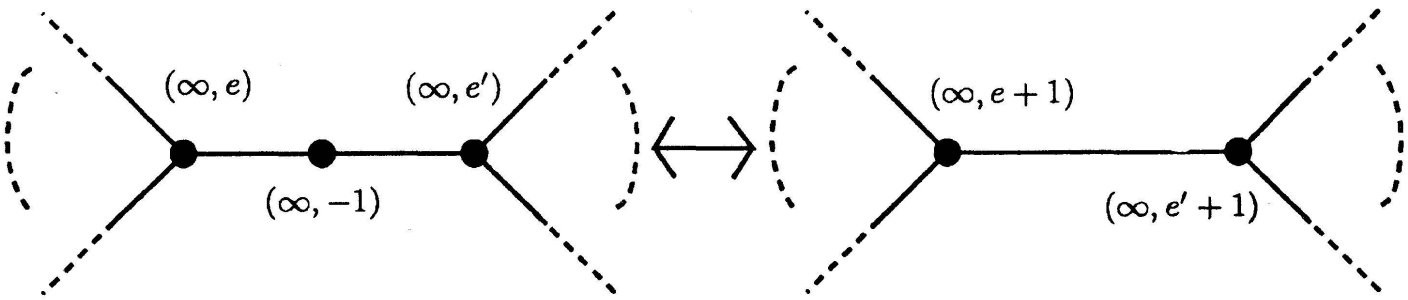

FIGURE 3.1.

(ii)

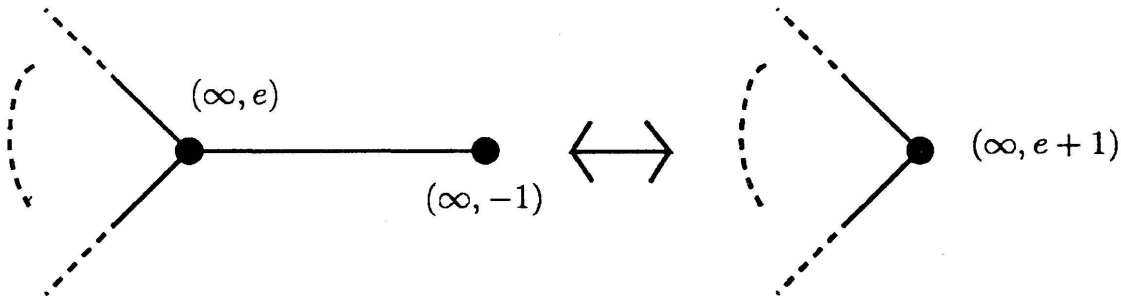

FIGURE 3.2.

3.3. DÉFINITION. *La* combinatoire *d'une application polynomiale* f *est la donnée de la classe d'équivalence du graphe pondéré* $G(F, f)$, *où* F *est un homogénéisé de* f, *pour la relation d'équivalence engendrée par* (i) *et* (ii).

3.4. *Remarque.* Le graphe $G(F, f)$ contient les renseignements suivants sur la topologie de l'application polynomiale f:

(a) Le plongement de la fibre générique de f.

(b) Le type topologique des fibres singulières.

(c) La topologie de f en dehors d'un compact.

(d) La base et la fibre de la fibration de f.

(e) La monodromie locale autour de chaque valeur critique ou irrégulière à l'infini.

Par contre, dans le résultat suivant nous montrons que la donnée de la classe d'équivalence de f ne détermine pas la topologie de f.

3.5. THÉORÈME. *Il existe* $f_1, f_2 \in \mathbf{C}[X, Y]$, *avec des homogénéisés* F_1, F_2 *tels que:*

(i) $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$;

(ii) $f_1 \not\sim f_2$.

Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour démontrer le théorème. Ils seront fournis dans la section suivante.

§4. UTILISATIONS D'UN COUPLE DE ZARISKI

Les couples de Zariski ont été définis dans [Artal]:

4.1. DÉFINITION. *Un* couple de Zariski *est une paire de deux courbes* C_1, C_2 *dans* $\mathbf{P}^2$ *telles que*

(i) $\deg C_1 = \deg C_2 = d$.

(ii) *Les deux courbes possèdent la même combinatoire, c'est-à-dire, il existe un difféomorphisme* $(T(C_1), C_1) \to (T(C_2), C_2)$, *où* $T(C_i)$ *est un voisinage régulier de la courbe* C_i *dans* $\mathbf{P}^2$, $i = 1, 2$.

(iii) *Les couples* $(\mathbf{P}^2, C_1)$ *et* $(\mathbf{P}^2, C_2)$ *ne sont pas homéomorphes.*

Dans [Artal] nous parlons de l'histoire de ces couples, qui commence avec Zariski. Dans cette section nous nous occupons d'un exemple important des