# §4. Utilisations d'un couple de Zariski

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

3.3. DÉFINITION. *La* combinatoire *d'une application polynomiale* $f$ *est la donnée de la classe d'équivalence du graphe pondéré* $G(F, f)$, *où* $F$ *est un homogénéisé de* $f$, *pour la relation d'équivalence engendrée par* (i) *et* (ii).

3.4. *Remarque.* Le graphe $G(F, f)$ contient les renseignements suivants sur la topologie de l'application polynomiale $f$:

(a) Le plongement de la fibre générique de $f$.

(b) Le type topologique des fibres singulières.

(c) La topologie de $f$ en dehors d'un compact.

(d) La base et la fibre de la fibration de $f$.

(e) La monodromie locale autour de chaque valeur critique ou irrégulière à l'infini.

Par contre, dans le résultat suivant nous montrons que la donnée de la classe d'équivalence de $f$ ne détermine pas la topologie de $f$.

3.5. THÉORÈME. *Il existe* $f_1, f_2 \in \mathbf{C}[X, Y]$, *avec des homogénéisés* $F_1, F_2$ *tels que:*

(i) $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$;

(ii) $f_1 \not\sim f_2$.

Nous n'avons pas encore les outils nécessaires pour démontrer le théorème. Ils seront fournis dans la section suivante.

## §4. UTILISATIONS D'UN COUPLE DE ZARISKI

Les couples de Zariski ont été définis dans [Artal]:

4.1. DÉFINITION. *Un* couple de Zariski *est une paire de deux courbes* $C_1, C_2$ *dans* $\mathbf{P}^2$ *telles que*

(i) $\deg C_1 = \deg C_2 = d$.

(ii) *Les deux courbes possèdent la même combinatoire, c'est-à-dire, il existe un difféomorphisme* $(T(C_1), C_1) \to (T(C_2), C_2)$, *où* $T(C_i)$ *est un voisinage régulier de la courbe* $C_i$ *dans* $\mathbf{P}^2$, $i = 1, 2$.

(iii) *Les couples* $(\mathbf{P}^2, C_1)$ *et* $(\mathbf{P}^2, C_2)$ *ne sont pas homéomorphes.*

Dans [Artal] nous parlons de l'histoire de ces couples, qui commence avec Zariski. Dans cette section nous nous occupons d'un exemple important des

couples de Zariski. L'exemple en question, qui se trouve dans [Artal], est une paire de courbes dont on sait que leur plongement dans $\mathbf{P}^2$ est différent grâce au $b$-invariant de chaque courbe. Rappelons une interprétation du $b$-invariant d'une courbe irréductible $Q$ de degré $d$:

4.1.2. Soit $L$ une droite quelconque de $\mathbf{P}^2$. On sait que $H_1(\mathbf{P}^2\backslash(Q \cup L); \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Considérons $X^d_{Q,L} \to \mathbf{P}^2\backslash(Q \cup L)$ le revêtement non ramifié cyclique à $d$ feuilles. Alors le rang de $H_1(X^d_{Q,L}; \mathbf{Z})$ est égal à $2b(C) + 1$.

Voici le couple de Zariski que nous allons utiliser:

4.3. DÉFINITION. *Soit $Q$ une courbe projective plane irréductible de degré six; nous dirons que $Q$ est de type $*$ si $Q$ possède un seul point singulier $P_1$ et si ce point est de type $\mathbf{A}_{17}$.*

Nous rappelons qu'une singularité de courbe plane est de type $\mathbf{A}_{17}$ s'il existe des coordonnées analytiques locales $x$, $y$ centrées au point singulier telles que l'équation de la singularité est $x^2 - y^{18} = 0$, i.e., la singularité possède deux branches lisses avec nombre d'intersection égal à 9.

Soit $\mathscr{F}$ l'espace de toutes les courbes de type $*$. Nous utiliserons le résultat suivant de [Artal].

4.4. THÉORÈME. *Il y a deux composantes connexes $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ dans $\mathscr{F}$. Si deux courbes appartiennent à des composantes connexes différentes, elles sont plongées différemment dans $\mathbf{P}^2$. Les deux composantes connexes sont décrites comme suit:*

(i) *$\mathscr{F}_1$ est l'ensemble des courbes $Q_1 \in \mathscr{F}$ telles que si $R_1$ est la conique qui a un contact maximal avec $Q_1$ au point singulier $P \in Q_1$, alors, le nombre d'intersection de $Q_1$ et $R_1$ en $P$ est égal à* 12.

*Il existe un ouvert de Zariski $\mathscr{U}_1$ de*

$$\{(X(XY - Z^2) - Y^3 - aZ(XY - Z^2))^2 + b(XY - Z^2)^3 \mid a, b \in \mathbf{C}\}$$

*tel que la famille $\mathscr{F}_1$ est l'ensemble de courbes projectives planes de degré six dont l'équation est linéairement équivalente à un élément de $\mathscr{U}_1$.*

*Pour les éléments $C_1 \in \mathscr{F}_1$ nous avons $b(C_1) = 2$.*

(ii) *$\mathscr{F}_2$ est l'ensemble des courbes $Q_2 \in \mathscr{F}$ telles que si $R_2$ est la conique qui a un contact maximal avec $Q_2$ au point singulier $P \in Q_2$, alors, le nombre d'intersection de $Q_2$ et $R_2$ en $P$ est égal à* 10.

*Un exemple d'élément de* $\mathscr{F}_2$ *est*

$$(X(XY - Z^2) - Y^2Z)^2 - 4Y(XY - Z^2)(Z(XY - Z^2) - Y^3) \\ - (Z(XY - Z^2) - Y^3)^2.$$

*Pour les éléments de* $C_2 \in \mathscr{F}_2$ *nous avons* $b(C_2) = 0$.

*Démonstration de (3.5).* Fixons une courbe $Q$ de type $*$ et soit $P_1$ son point singulier. Soit $L$ une droite générique passant par $P_1$, c'est-à-dire, $L$ n'est pas tangente à $Q$ en $P_1$ et $\#(L \cap Q) = 5$, $L \cap Q = \{P_1, \ldots, P_5\}$.

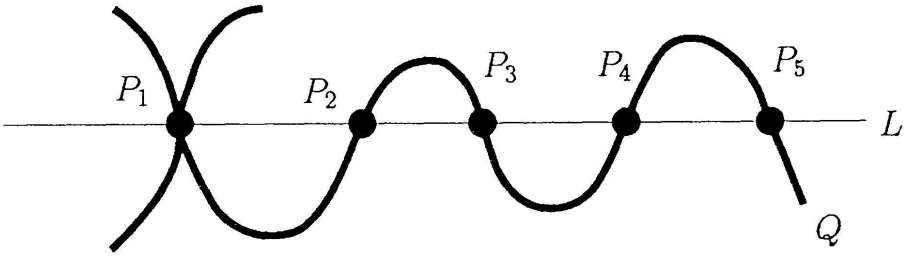


FIGURE 4.1.

Choisissons des coordonnées telles que $L$ soit la droite d'équation $Z = 0$, $P_1$ soit $[1:0:0]$ et que la droite tangente à $Q$ en $P_1$ soit $Y = 0$. Considérons $f(X, Y) := F(X, Y, 1) \in \mathbf{C}[X, Y]$, où $F(X, Y, Z) = 0$ est l'équation de $Q$ dans ce système de coordonnées.

4.5. LEMME. *$S_\infty(f) = \{0\}$ et si $t \neq 0$, la courbe $Q_t$ d'équation $F(X, Y, Z) = tZ^d$ possède un seul point singulier en $P_1$. Ce point est de type $\mathbf{A}_5$ et la tangente au point singulier n'est pas la droite $L$.*

*Preuve.* En prenant $X = 1$, nous avons des coordonnées affines centrées en $P_1$. L'équation de $Q_t$ est:

$$0 = g_t(Y, Z) := F(1, Y, Z) - tZ^6 = Y^2 + \text{termes de degré} \geqslant 3 .$$

Nous éclatons le point $P_1$. Nous notons $E_1$ la composante exceptionnelle; nous gardons la même notation pour les transformées strictes. La courbe $Q$, et avec elle les courbes $Q_t$, passent par un point $\hat{P}_1$ qui est dans $E_1$ mais pas dans $L$.

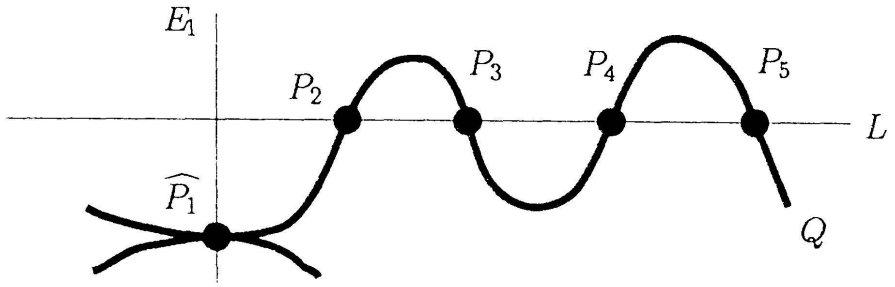


FIGURE 4.2.

On choisit des coordonnées affines centrées en $\hat{P}_1$ telles que l'équation de l'éclatement s'écrive comme suit:

$$(y_1, z_1) \mapsto (y_1 z_1, z_1) .$$

L'équation de $E_1$ est $Z_1 = 0$. Nous savons que $Q$ possède un point singulier en $P_1$ de type $\mathbf{A}_{15}$, non tangent à $E_1$.

L'équation de $Q$ en $P_1$ est:

$$0 = \hat{g}(Y_1, Z_1) := \frac{F(1, Y_1 Z_1, Z_1)}{Z_1^2} = (Y_1 + aZ_1)^2 + \text{termes de degré} \geqslant 3 ,$$

où $a \in \mathbf{C}$. Par conséquent, l'équation de $Q_t$ est $\hat{g}(Y_1, Z_1) - tZ_1^4 = 0$.

Nous éclatons maintenant le point $\hat{P}_1$. Les courbes $Q$ et $Q_t$ vont toutes passer par un point $\hat{P}_1'$ de la nouvelle composante exceptionnelle $E_2$ (qui ne sera pas dans $E_1$). On peut choisir des coordonnées centrées en $\hat{P}_1'$ telles que l'équation de l'éclatement soit:

$$(y_2, z_2) \mapsto ((y_2 - a) z_2, z_2) .$$

D'après les équations précédentes et puisque $Q$ possède en $\hat{P}_1'$ un point singulier de type $\mathbf{A}_{13}$, l'équation de $Q$ est de la forme $0 = Y_2^2 +$ termes de degré $\geqslant 3$, et, par conséquent, celle de $Q_t$ est de la forme:

$$0 = Y_2^2 - tZ_2^2 + \text{termes de degré} \geqslant 3 ,$$

ce qui implique que $Q_t$ possède un point double ordinaire en $\hat{P}_1'$ si $t \neq 0$. Par conséquent, $(Q_t, P_1)$ est de type $\mathbf{A}_5$. $\square$

4.6. CONSÉQUENCE. Tous les polynômes $f$ ainsi obtenus, possèdent la même fibre générique, car, d'après le lemme précédent ils ont le même entrelacs générique à l'infini, et l'on applique (2.7). En utilisant (2.9) nous voyons aussi que tous ces polynômes sont topologiquement conjugués à l'infini.

4.7. PROPOSITION. *Soient $Q_i$ des courbes projectives planes d'équation $F_i(X, Y, Z) = 0, i = 1, 2,$ où*

$$\begin{aligned} F_1(X, Y, Z) &= (X(XY - Z^2) - Y^3)^2 - (XY - Z^2)^3 \\ F_2(X, Y, Z) &= (X(XY - (Y+Z)^2) - Y^2(Y+Z))^2 \\ &\quad - 4Y(XY - (Y+Z)^2)\,(Y(XY - (Y+Z)^2) - Y^3) \\ &\quad - (X(XY - (Y+Z)^2) - Y^3)^2 \end{aligned}$$

*Alors, $Q_1$ et $Q_2$ sont de type $*$ et les couples $(\mathbf{P}^2, Q_1)$ et $(\mathbf{P}^2, Q_2)$ ne sont pas homéomorphes. En particulier, les polynômes $f_1, f_2$ obtenus comme ci-dessus ne sont pas topologiquement conjugués.*

*Preuve.* La première assertion est une conséquence de (4.4). En effet, il est facile de voir que $Q_1 \in \mathscr{F}_1$ (prendre $a = 0, b = -1$) et $Q_2 \in \mathscr{F}_2$ (nous avons remplacé $Z$ par $Y + Z$ dans l'exemple donné dans (4.4)).

Il est facile de voir que la droite $L$ d'équation $Z = 0$ est générique pour les deux cas. Soient $X^6_{Q_1,L}$ et $X^6_{Q_2,L}$ les revêtements cycliques d'ordre 6 de $\mathbf{P}^2 \backslash (Q_1 \cup L)$ et $\mathbf{P}^2 \backslash (Q_2 \cup L)$, respectivement. Les rangs des groupes abéliens $H_1(X^6_{Q_1,L}, \mathbf{Z})$ et $H_1(X^6_{Q_2,L}, \mathbf{Z})$ sont égaux à 3 et 1, respectivement, d'après (4.4) et (4.2). Par conséquent, les couples $(\mathbf{P}^2, Q_i \cup L)$, $i = 1, 2$, ne sont pas homéomorphes.

Si l'on construit les polynômes $f_i(X, Y) := F_i(X, Y, 1)$, $i = 1, 2$, nous avons vu que les couples $(\mathbf{C}^2, f_i^{-1}(0))$, $i = 1, 2$, ne sont pas homéomorphes. Puisque 0 est la seule valeur singulière à l'infini, d'après (4.5), nous en déduisons que les polynômes ne sont pas conjugués. □

Il était concevable à priori que les plongements distincts de $f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$, soient provoqués par les singularités des autres fibres de chaque polynôme. Un calcul nous donne le lemme suivant:

4.8. LEMME. *$\# C(f_i) = 7$ et pour chaque $t \in C(f_i)$, la fibre $f_i^{-1}(t)$ a exactement un point double ordinaire.*

*Fin de la démonstration de (3.5).* Considérons les courbes $C_{f_i}$ données par les polynômes $\tilde{F}_i(X, Y, Z)$, $i = 1, 2$. Le lemme précédent et le lemme (4.5) nous montrent qu'il y a une bijection entre les singularités de $C_{f_1}$ et $C_{f_2}$ qui respecte le type topologique. Le nombre de composantes irréductibles et la distribution de singularités dans les composantes sont les mêmes pour les deux courbes.

Nous en déduisons que $G(F_1, f_1) = G(F_2, f_2)$ et (4.7) dit que $f_1 \not\sim f_2$. □

Nous finissons en utilisant ces polynômes pour donner des contre-exemples à la conjecture de Neumann:

4.9. THÉORÈME. *Les courbes $f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$, ont les mêmes entrelacs à l'infini, mais elles ne sont pas topologiquement équivalentes.*

*Démonstration.* Nous venons de voir dans la preuve de (4.7) que les deux courbes ne sont pas topologiquement équivalentes.

D'après la définition des courbes de type $*$, et du choix générique de la droite à l'infini, nous en déduisons que les deux courbes ont le même entrelacs à l'infini. En effet, il suffit de prendre comme *grande sphère* le bord d'un

voisinage tubulaire de la droite à l'infini $Z = 0$ dans $\mathbf{P}^2$. Dans les deux cas, les courbes rencontrent la droite en quatre points lisses et au point singulier de type $\mathbf{A}_{17}$; les droites tangentes aux points d'intersection sont toujours différentes de la droite à l'infini. En utilisant les techniques de [Eisenbud-Neumann], nous voyons que les deux entrelacs à l'infini sont topologiquement équivalents. □

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES


[Artal] ARTAL, E. Les couples de Zariski. *Journal of Algebraic Geometry* (à paraître).

[Broughton] BROUGHTON, S.A. On the Topology of Polynomial Hypersurfaces. Dans *Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 40* (Arcata Singularities Conference, 167-178, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1983.

[Eisenbud-Neumann] EISENBUD, D. and W.D. NEUMANN. Three-Dimensional link theory and invariants of plane curve singularities. *Annals of Mathematic Studies 101,* Princeton Univ. Press, Princeton N.Y., 1985.

[Fourrier] FOURRIER, L. Thèse, Université de Toulouse, 1993.

[Lê-Ha] LÊ DUNG TRÁNG et HA HUY VUI. Sur les polynômes complexes. *Acta-Math. Vietnam. 9* (1984), 21-32.

[Neumann 1] NEUMANN, W.D. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc. 268* (1981), 299-344.

[Neumann 2] —— Complex algebraic plane curves via their links at infinity. *Invent. Math. 98* (1989), 445-489.

[Neumann-Rudolph] NEUMANN, W.D. and L. RUDOLPH. Unfoldings in knot theory, *Math. Ann. 278* (1987), 409-439.

[Thom] THOM, R. Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc. 75* (1969), 240-284.


*(Reçu le 2 décembre 1992)*

Enrique Artal-Bartolo

Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense
E-28040 Madrid
Spain

Adresse électronique: artal@mat.ucm.es