2.4. Correspondance entre sous-cogèbres et sous-catégories de Com_C^f.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

b) Com_C^f *est semi-simple, et tout objet simple de* Com_C^f *est absolument simple.*

C'est trivial à partir du résultat analogue pour les algèbres.

[Noter que ce résultat s'applique notamment à la bigèbre d'un groupe réductif déployé sur K, lorsque $\mathrm{car}(K) = 0$. Mais, bien entendu, il ne donne que la structure de *cogèbre* de la bigèbre en question, pas sa structure d'algèbre.]

d) A tout $E \in \mathrm{Com}_C^f$ on peut associer un élément *trace* $\theta_E \in C$ de la manière suivante: E définit un morphisme de cogèbres

$$\mathrm{End}(E) \to C \quad \text{(cf. n° 1.2)}$$

et l'on prend l'image de 1_E dans C par ce morphisme. En termes d'une base (v_i) de E, et des $c_{ij} \in C$ correspondants *(loc. cit.),* on a $\theta_E = \sum_i c_{ii}$.

[Voici encore une autre définition: si l'on regarde E comme module sur l'algèbre C'_E duale de C_E, on a $C'_E \subset \mathrm{End}(E)$, et la forme $u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$, étant une forme linéaire sur C'_E, s'identifie à un élément de C_E qui n'est autre que θ_E.]

PROPOSITION 4. *Supposons K de caractéristique* 0. *Soient E_1 et E_2 deux comodules de rang fini, et soient $\theta_1, \theta_2 \in C$ les traces correspondantes. On a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si les quotients de Jordan-Hölder de E_1 et E_2 coïncident* (avec leurs mutiplicités).

En effet, le résultat dual (pour les modules de rang fini sur une algèbre) est bien connu (*Alg.* VIII).

COROLLAIRE. *Si E_1 et E_2 sont semi-simples, on a $\theta_1 = \theta_2$ si et seulement si E_1 et E_2 sont isomorphes.*

Remarques

1) On peut aussi donner des résultats lorsque $\mathrm{car}(K) \neq 0$. Par exemple, si les E_α sont des comodules absolument simples deux à deux non isomorphes, les θ_α correspondants sont linéairement indépendants sur K.

2) Les résultats précédents s'appliquent notamment aux *représentations linéaires* d'un schéma en groupes (ou en monoïdes) affine sur K.

2.4. CORRESPONDANCE ENTRE SOUS-COGÈBRES ET SOUS-CATÉGORIES DE Com_C^f.

Si D est une sous-cogèbre de C, on a déjà remarqué que tout D-comodule peut être considéré comme un C-comodule. On obtient ainsi un isomorphisme de Com_D^f sur une sous-catégorie abélienne $\tilde{D}$ de Com_C^f.

THÉORÈME 2. *L'application* $D \mapsto \tilde{D}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de* C *sur l'ensemble des sous-catégories* L *de* Com_C^f *vérifiant les conditions suivantes:*

1) L *est pleine* (i.e. si $E, F \in L$, on a $\mathrm{Hom}^L(E, F) = \mathrm{Hom}^C(E, F)$),

2) L *est stable par sommes directes finies,*

3) *Tout objet de* Com_C^f *qui est isomorphe à un sous-objet, ou à un objet quotient, d'un objet de* L, *appartient à* L.

[On se permet d'écrire $E \in L$ à la place de $E \in \mathrm{ob}(L)$.]

Soit Θ l'ensemble des L vérifiant les conditions 1), 2), 3). Si $L \in \Theta$, il est clair que L est une catégorie abélienne ayant même sous-objets et mêmes objets quotients que Com_C^f. On notera $C(L)$ la sous-cogèbre de C somme des cogèbres C_E, pour $E \in L$. Le théorème va résulter des deux formules suivantes:

a) $C(\tilde{D}) = D$ pour toute sous-cogèbre D de C;

b) $C(L)\tilde{} = L$ pour toute $L \in \Theta$.

La première de ces deux formules est triviale: elle revient à dire que D est réunion des sous-cogèbres C_E, lorsque E parcourt l'ensemble (!) des D-comodules de rang fini, ce qui a été prouvé au n° 2.1. Pour la seconde, il suffit de prouver ceci:

LEMME 1. *Soit* E *un comodule de rang fini, soit* $C_E \subset C$ *la cogèbre correspondante, et soit* F *un* C_E*-comodule* (considéré comme C-comodule) *de rang fini. Il existe alors un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* F *soit isomorphe à un sous-comodule d'un quotient de* E^n.

Par dualité, cela revient à dire que, si B est une algèbre de rang fini, et E un B-module fidèle, tout B-module de type fini F est isomorphe à un quotient d'un sous-module d'un E^n. Or F est isomorphe à un quotient d'un module libre B^q, et l'on est ramené à prouver que B^q est isomorphe à un sous-module d'un E^n; il suffit d'ailleurs de le faire pour $q = 1$. Mais c'est clair: si E est engendré par $x_1, \ldots, x_n$, l'application $b \mapsto (bx_1, \ldots, bx_n)$ est une injection de B dans E^n, puisque E est fidèle. D'où le lemme, et, avec lui, le théorème.

Remarques

1) Le lecteur peut à volonté interpréter Com_C^f comme une *petite* catégorie (relative à un univers fixé, par exemple), ou une *grosse*. Le th. 2 est correct dans l'une ou l'autre interprétation.

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que F est isomorphe à un sous-comodule de $C_E \otimes F$, i.e. de $(C_E)^n$, avec $n = \operatorname{rang}(F)$. D'autre part, C_E est isomorphe, comme comodule, à un quotient de $E \otimes E'$, c'est-à-dire de E^m, où $m = \operatorname{rang}(E)$. D'où le résultat.

Exemples

1) La sous-catégorie de Com_C^f formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de C (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).

2) Supposons C semi-simple, et soit $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des classes de C-comodules simples. Posons $C_i = C_{E_i}$, de sorte que C est somme directe des cogèbres simples C_i. Si J est une partie de I, $C_J = \sum_{i \in J} C_i$ est une sous-cogèbre de C, et toute sous-cogèbre de C s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à C_J est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des E_i, $i \in J$.

2.5. Où l'on caractérise Com_C^f

Soit M une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

a) M est une catégorie *sur* K; cela signifie que, si E, F sont des objets de M, $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.

b) On se donne un foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}_K^f$ de M dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

(i) Le foncteur v est *K-linéaire,* i.e. pour tout $E, F \in M$, l'application $v: \mathrm{Hom}^M(E, F) \to \mathrm{Hom}(v(E), v(F))$ est K-linéaire.

(ii) Le foncteur v est *exact* et *fidèle.*

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre C sur K* (et une seule, à isomorphisme près) *telle que M soit équivalente à* Com_C^f, *cette équivalence transformant le foncteur v en le foncteur C-module $\mapsto$ espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter M comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de M.]