4.2. La bigèbre d'un groupe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des A-modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$-modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A; on le munit de sa structure naturelle de A-bimodule. Si $\mathfrak{a} \in S$, soit $F_{\mathfrak{a}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans F. Soit C la réunion des $F_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a} \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre,* caractérisée par la formule:

$$(1) \qquad < d(c), a \otimes b > \; = \; < c, ab > \qquad \text{si} \qquad c \in C, a, b \in A \; .$$

De plus, tout A-module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C, et réciproquement; on a

$$(2) \qquad < d_E(x), a \otimes x' > \; = \; < xa, x' > \qquad \text{si} \qquad x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b′)) *Le sous-A-module à gauche* (resp. à droite) *de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A-module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x'_i \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$< f, a > \; = \; \sum < x_i a, x'_i > \qquad \textit{pour tout} \qquad a \in A \; .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A-module à gauche F appartient à S_g; comme S est cofinal dans S_g, cela revient à dire que f appartient à C. On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b′).

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E, cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ. Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$< f, \sum \lambda_i \gamma_i > \; = \; \sum \lambda_i f(\gamma_i) \qquad \text{si} \qquad f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma \; .$$

La cogèbre correspondante est notée $C = C(\Gamma)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

(i) La co-unité de C est l'application $e: f \mapsto f(1)$.

(ii) Pour qu'une fonction f appartienne à C, il faut et il suffit que *ses translatées* (à gauche ou à droite) *engendrent un K-espace vectoriel de dimension finie.* (C'est l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) du Lemme 1.)

(iii) Identifions à la façon habituelle les éléments de $F \otimes F$ aux *fonctions décomposables* sur $\Gamma \times \Gamma$. Si $f \in C$, on a $d(f) \in C \otimes C$ et $C \otimes C$ est un sous-espace de $F \otimes F$; ainsi $d(f)$ peut être interprétée comme une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$. *On a*:

$$d(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1 \gamma_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma . \tag{3}$$

(Cela ne fait que traduire la formule (1) du n° précédent.)

(iv) C contient 1, et est stable par le *produit*: cela résulte de (ii).

(v) Les structures de cogèbre et d'algèbre de C sont *compatibles* entre elles, i.e. elles font de C une *bigèbre.* Cette bigèbre vérifie les axiomes du n° 3.1. (L'axiome (i) dit que $f \mapsto d(f)$ doit être un morphisme d'*algèbres*; c'est le cas. Les autres axiomes sont encore plus évidents.)

(vi) La bigèbre C possède une *inversion* i donnée par

$$i(f)(\gamma) = f(\gamma^{-1}) . \tag{4}$$

(Il faut vérifier les conditions (a) et (b) du n° 3.1. La condition (a) est évidemment satisfaite. Pour (b), soit $f \in C$ et écrivons $d(f)$ sous la forme $\sum_\alpha g_\alpha \otimes h_\alpha$. On a

$$(1_C \otimes i)(d(f)) = \sum g_\alpha \otimes i(h_\alpha)$$

et l'on doit voir que $\sum g_\alpha . i(h_\alpha) = e(f).1$. Or, si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sum g_\alpha(\gamma) i(h_\alpha)(\gamma) &= \sum g_\alpha(\gamma) h_\alpha(\gamma^{-1}) = d(f)(\gamma, \gamma^{-1}) \\ &= f(\gamma . \gamma^{-1}) = f(1) = e(f) , \end{aligned}$$

d'où la formule voulue.)

(vii) Soit $G = \mathrm{Spec}(C)$ le *schéma en groupes* attaché à C. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un morphisme $f \mapsto f(\gamma)$ de C dans K, donc un élément du groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K. *L'application* $\Gamma \to G(K)$ *ainsi définie est un homomorphisme*; cela résulte de la définition de la loi de composition de $G(K)$.

(viii) D'après le n° 4.1, tout Γ-module à droite E de rang fini est muni canoniquement d'une structure de C-comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E, et si l'on a

$$v_i\gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma) v_j \ , \quad \text{avec} \quad c_{ij} \in C \ , \tag{5}$$

le coproduit de E est donné par:

$$d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j \ . \tag{6}$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre Γ-modules à droite de rang fini et C-comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

Remarque. On peut caractériser $G = \mathrm{Spec}(C)$ par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de Γ dans le groupe $H(K)$ des K-points d'un schéma en groupe affine H se prolonge de manière unique en un morphisme $G \to H$. Le foncteur $\Gamma \mapsto G$ est donc *adjoint* du foncteur $H \mapsto H(K)$.

4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. *Soit L une sous-catégorie pleine de la catégorie des Γ-modules à gauche de rang fini. On dit que L est saturée si L vérifie les conditions suivantes:*

a) *Si $E \in L$ et si F est isomorphe, soit à un quotient de E, soit à un sous-objet de E, on a $F \in L$.*

b) *L est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.*

c) *La représentation unité (de module K) appartient à L.* (Bien entendu, on a une notion analogue pour les Γ-modules à droite.)

THÉORÈME 1. *Si L est saturée, il existe une sous-bigèbre C_L de $C(\Gamma)$ et une seule telle que L soit la catégorie des C_L-comodules à droite de rang fini. La bigèbre C_L contient l'élément* 1, *vérifie les axiomes du* n° 3.1, *et est stable par l'inversion i.*

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.